Máximo Pérez • Sergio Pérez

Matemáticas 3

Construyo y aprendo Matemáticas

Secundaria

Serie
Nueva Generación

EDE
Ediciones de Excelencia

Sistema de clasificación Melvil Dewey

510
P47
2017 Pérez, Máximo y Pérez, Sergio A.
Matemáticas 3 : Construyo y aprendo Mátematicas /
Máximo Pérez y Sergio A. Pérez.
— México : Fernández educación, 2017.
272 p. : il.

ISBN: 978-607-472-084-6

1. Matemáticas. 2.Estudio y enseñanza.

Se contó con la participación del equipo pedagógico de Fernández educación:

Sandra Cara Camarena
Laura Arzola Guerra
Juan Carlos Tobón Gutiérrez
Marco Augusto Aguirre Muciño
Bernardo Zavaleta Pérez
Cruz Antonio Guevara Sánchez
Fernando Cruz Arce Valentín
Arturo Hernández Guerrero
Pedro Tapia Pacheco
Claudia D. Jiménez Avilés
Enrique Trejo Ávila
Claudia Brenda Camacho López
Iván Arturo Márquez Hernández
Agustina Martínez Salinas

¿Sugerencias o comentarios?

¡Contáctanos!

55 5090 7700 ext. 7480
www.fernandezeditores.com.mx
www.social.adiactiva.com.mx
secundaria@fernandezeditores.com.mx

Avenida Insurgentes Sur Núm. 2453 Piso 12, Colonia Tizapán, Delegación Álvaro Obregón, C.P. 01090, Ciudad de México.

MATEMÁTICAS 3 CONSTRUYO Y APRENDO MATEMÁTICAS
POR MÁXIMO PÉREZ Y SERGIO A. PÉREZ
PRIMERA EDICIÓN, ENERO 2015
SEGUNDA REIMPRESIÓN DE LA PRIMERA EDICIÓN, ENERO 2017

ISBN: 978-607-472-084-6

Esta obra se terminó de imprimir en el mes de enero de 2017 en los talleres de Compañía Editorial Ultra, S.A. de C.V. Centeno 162-2, Col. Granjas Esmeralda, C.P. 09810, Ciudad de México.

IMPRESO EN MÉXICO – PRINTED IN MEXICO

Prólogo

La presente obra ha sido diseñada con el fin de que el alumno de tercer grado de secundaria desarrolle las habilidades propias de esta asignatura y, al mismo tiempo, amplíe su cultura matemática.

Los contenidos del libro de texto están distribuidos en diversas etapas articuladas para que el alumno potencie sus habilidades al máximo. En principio, el estudiante se enfrenta a una pregunta o situación problemática que deberá resolver haciendo uso de sus conocimientos previos. Tendrá que llevar a cabo ciertos procesos que privilegian su creatividad, tales como opinar, reflexionar, plantear métodos y estrategias de resolución del problema, implementarlos y verificarlos.

Durante el desarrollo del contenido, el estudiante construirá su conocimiento matemático mediante la resolución de problemas, verificando y aclarando sus propias ideas con las que se presentan en el contenido de apoyo, el cual le ayudará a formalizar sus conocimientos matemáticos.

Para que el alumno tenga en cuenta los aprendizajes esperados del curso, éstos se encuentran señalados al inicio de cada bloque. Así, será partícipe de su propia adquisición gradual de conocimientos y habilidades durante el estudio del contenido matemático. Sin embargo, habrá algunos casos en los que el aprendizaje esperado no corresponda de manera directa con el contenido abordado, ya que el logro de éste se alcanzará después de estudiar varios contenidos matemáticos que se encuentran estrechamente relacionados.

Con el fin de que el alumno obtenga los aprendizajes que se esperan de este curso, el libro fomenta el trabajo colectivo e individual, así las ideas que elabore podrá contrastarlas con las de sus compañeros, enriqueciendo sus conocimientos. Los ejercicios que se presentan van de la aplicación directa de un método al análisis de éste.

Todo esto con el fin de que el estudiante cuente con una amplia competencia para resolver problemas por sí mismo, además de que pueda comunicar la información matemática obtenida, utilizando técnicas eficientes que le ayudarán a formalizar sus procedimientos para conseguir excelentes resultados y aplicarlos en su vida.

Palabras al profesor

Las diversas situaciones y retos a los que nos enfrentamos en la vida cotidiana evidencian la necesidad de contar con habilidades y actitudes matemáticas que nos permitan llegar a soluciones efectivas ante cualquier problema.

En este sentido, la enseñanza de las matemáticas adquiere una mayor relevancia en el proceso de aprendizaje de los alumnos. El docente deberá ser un facilitador que haga accesible el conocimiento a los jóvenes, acercándolos de manera gradual a esta asignatura con el fin de formar estudiantes capaces de responder de manera efectiva ante los retos que les presenta su entorno.

Por eso, hemos desarrollado el libro *Matemáticas 3. Construyo y aprendo Matemáticas*, con el fin de que el profesor cuente con el apoyo necesario para la impartición de la asignatura de manera contextualizada, interesante y divertida.

Las actividades que se sugieren al docente están encaminadas a hacer explícitos los métodos y conocimientos que crean los alumnos para que a partir de éstos se genere una enseñanza efectiva. Asimismo, al final de cada bloque, el docente podrá utilizar la evaluación que se incluye para conocer y registrar los logros de sus alumnos, así como las áreas de oportunidad de éstos.

Sin duda, *Matemáticas 3. Construyo y aprendo Matemáticas* es una herramienta para el docente que busca hacer de las clases de matemáticas una experiencia agradable para el alumno, al promover una actitud positiva hacia el aprendizaje de esta asignatura. Por tanto, creemos que este libro será la vía por la cual el estudiante podrá adentrarse al fascinante mundo de las Matemáticas.

Palabras al alumno

Este libro de texto te servirá de apoyo en la construcción de tu conocimiento matemático. Las diversas actividades redundarán en tu aprendizaje de las matemáticas. Para que sepas cuáles son los aprendizajes esperados durante el curso, los encontrarás indicados al inicio de cada bloque. Los bloques se conforman por los contenidos matemáticos necesarios para que llegues al aprendizaje esperado y, aunque en ocasiones parezca que éste no corresponde con el contenido, te darás cuenta que es porque todos los contenidos están estrechamente relacionados, unos más que otros. Por ello, en algunos casos, será necesario que estudies diversos temas para alcanzar el aprendizaje deseado.

Con la finalidad de que vayas familiarizándote con este libro, a continuación te especificamos su estructura que se encuentra organizada por secuencias: al inicio de cada una encontrarás un problema o pregunta que te hará reflexionar y te motivará a tratar de hallar una solución, utilizando los conocimientos con los que ya cuentas. De este modo, desarrollarás tu creatividad y destreza que son una parte fundamental de tu pensamiento matemático, y te apoyarán a determinar las soluciones de los problemas.

Lo importante es que consideres todas las maneras en que puedes abordar algún problema; investiga cuando lo necesites, intenta, prueba tus ideas y corrígelas cuando sea necesario. Aprovecha todas las herramientas que tengas disponibles. Después formalizarás tus estrategias mediante las actividades que contiene el libro, apoyándote con tu grupo, para que puedas aprender otros métodos y conceptos.

Cuando hayas terminado cada bloque, deberás realizar una evaluación que te ayudará a saber cuáles fueron tus logros de aprendizaje.

La organización y el diseño de este libro se planearon pensando en que este material didáctico funcione como una herramienta para tus estudios con la que puedas aprender y disfrutar las matemáticas.

Guía para usar este libro

Los contenidos del libro están distribuidos en cinco bloques que, a su vez, se subdividen en tres ejes temáticos: Sentido numérico y pensamiento algebraico; Forma, espacio y medida; y Manejo de la información. Para diferenciar cada bloque se ha utilizado un color que permita su fácil identificación. Al inicio de éstos se enuncian los aprendizajes esperados así como las competencias matemáticas. Con la finalidad de que ubiques fácilmente el contenido matemático y lo que se desarrollará en él, al comienzo de cada secuencia didáctica se indica el título y el contenido correspondiente.

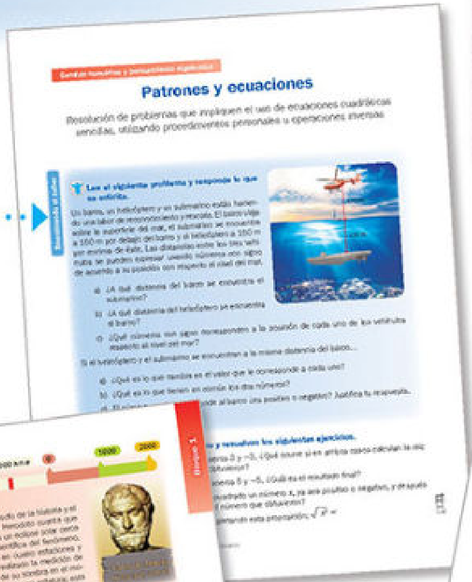
Cada contenido matemático incluye las secciones que se describen a continuación, cuyo propósito es complementar tus conocimientos.

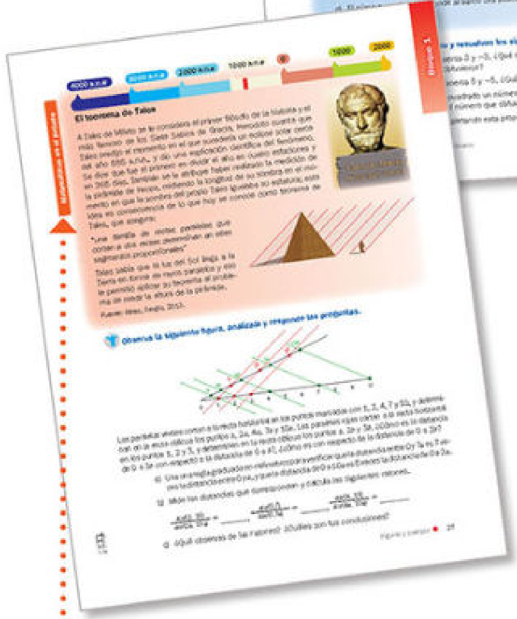
Reactivando el saber

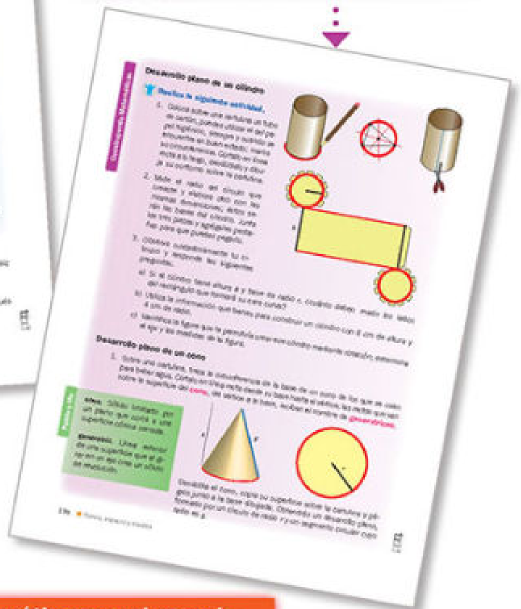
Sección que presenta pequeños y sencillos resúmenes que te permiten retomar de forma rápida y directa los conocimientos previos necesarios para el desarrollo de los contenidos.

Construyendo Matemáticas

Actividades que te proponen un reto mental ya que debes realizar modelos con material tangible (plastilina, cartulina, papel, etcétera) y te permiten estar en contacto con tu comunidad con la finalidad de construir y reforzar tus conocimientos, al socializar tus métodos y experiencias.







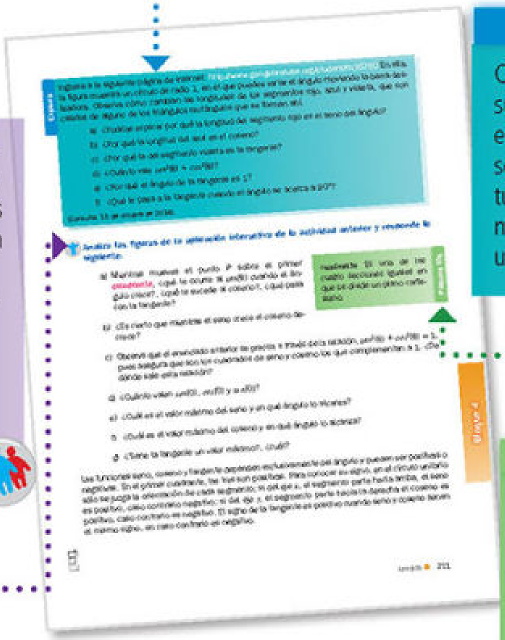
Matemáticas en el pasado

Esta sección te proporciona información histórica relevante sobre la asignatura y se relaciona directamente con el contenido que se está tratando. Muchos de los textos que encontrarás en esta sección los escribieron exprofeso los autores, por lo que son contenido especialmente diseñado para tu aprendizaje.

Para apoyar las secuencias didácticas, a lo largo de los bloques se incluyen diferentes cápsulas y se establecen distintas modalidades de trabajo, mismas que se describen a continuación.

Modalidad de trabajo

Para que enriquezcas tus conocimientos, el libro presenta diferentes formas de trabajo que consisten en actividades individuales, en pareja, en equipo y en grupo. Así, mediante la convivencia, contrastarás los conocimientos adquiridos con los de tus compañeros, lo que te generará una actitud positiva hacia las Matemáticas.



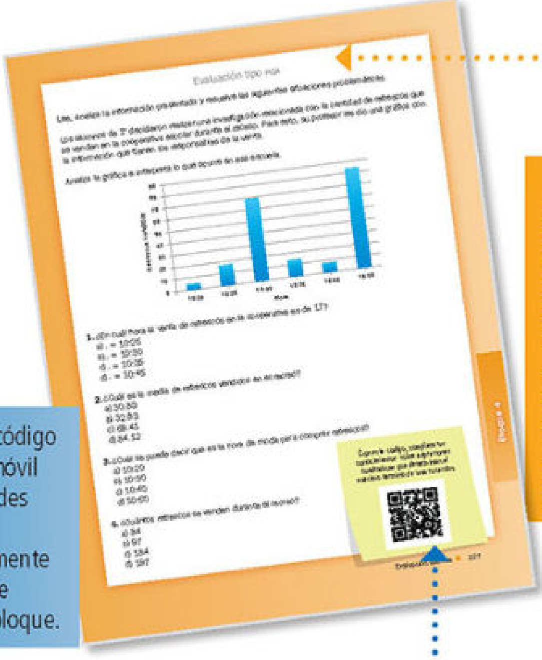
Explora

Cápsula que te sugiere sitios web en los que podrás seguir desarrollando tus habilidades matemáticas de una manera didáctica.

Palabra Mu

En esta sección, encontrarás la definición de términos y conceptos que requieres conocer para tu aprendizaje.

Al final de cada bloque se incluye una evaluación tipo PISA:



Utiliza el lector de código QR en dispositivo móvil y descarga actividades interactivas para que evalúes lúdicamente los aprendizajes que obtuviste en cada bloque.

Evaluación tipo PISA

Con el fin de promover tu capacidad de abstracción y de que tengas un manejo conceptual del contenido que desarrollaste en cada bloque, al final de éstos, se encuentra una evaluación cuya resolución te permitirá conocer tus logros y oportunidades matemáticos así como prepararte para la prueba PISA.

Índice

Competencias que se favorecen

- Resolver problemas de manera autónoma
- Comunicar información matemática
- Validar procedimientos y resultados
- Manejar técnicas eficientemente

Aprendizajes esperados

- Explica la diferencia entre eventos complementarios, mutuamente excluyentes e independientes.

Patrones y ecuaciones

Resolución de problemas que impliquen el uso de ecuaciones cuadráticas sencillas, utilizando procedimientos personales u operaciones inversas

Reactivando el saber

Lee el siguiente problema y responde lo que se solicita.

Un barco, un helicóptero y un submarino están haciendo una labor de reconocimiento y rescate. El barco viaja sobre la superficie del mar, el submarino se encuentra a 150 m por debajo del barco y el helicóptero a 150 m por encima de éste. Las distancias entre los tres vehículos se pueden expresar usando números con signo de acuerdo a su posición con respecto al nivel del mar.

a) ¿A qué distancia del barco se encuentra el submarino?

b) ¿A qué distancia del helicóptero se encuentra el barco?

c) ¿Qué números con signo corresponden a la posición de cada uno de los vehículos respecto al nivel del mar?

Si el helicóptero y el submarino se encuentran a la misma distancia del barco…

a) ¿Qué es lo que cambia en el valor que le corresponde a cada uno?

b) ¿Qué es lo que tienen en común los dos números?

c) El número que le corresponde al barco ¿es positivo o negativo? Justifica tu respuesta.

Reúnanse con un compañero y resuelvan los siguientes ejercicios.

a) Eleven al cuadrado los números 3 y −3. ¿Qué ocurre si en ambos casos calculan la raíz cuadrada del número que obtuvieron?

b) Hagan lo mismo con los números 5 y −5. ¿Cuál es el resultado final?

c) ¿Qué obtienen si elevan al cuadrado un número x, ya sea positivo o negativo, y después calculan la raíz cuadrada del número que obtuvieron?

d) Escriban su conclusión completando esta proposición: $\sqrt{x^2} =$ __________.

Expresen los siguientes enunciados con lenguaje matemático y contesten lo que se pide.

a) Si a un número positivo se le suman 3 unidades y el resultado se eleva al cuadrado, se obtiene 16, ¿de qué número se trata?

b) Si a un número negativo se le suman 3 unidades y el resultado se eleva al cuadrado, se obtiene 16, ¿de qué número se trata?

c) Si a un número positivo o negativo se le suman 17 unidades y el resultado se eleva al cuadrado, se obtiene 625, ¿de qué número se trata? Explica cuántas soluciones tiene este problema.

d) ¿Qué número elevado al cuadrado da como resultado −9?

Realicen lo que se indica a continuación.

1. Completen el siguiente enunciado, para ello traduzcan la ecuación $\sqrt{(x-3)^2} = 4$ a lenguaje ordinario.

   a) Si a un número se le restan __________ unidades y el resultado se __________ y luego se __________, se obtiene __________. ¿De qué número se trata?

2. ¿Cuáles de las siguientes ecuaciones son equivalentes a la del ejercicio anterior? Analícenlas y completen el enunciado.

   a) $x - 3 = 2$

   b) $|x - 3| = 2$

   c) $|3 - x| = 2$

   • La ecuación que no es equivalente es __________ y cualquiera de las otras dos puede interpretarse del siguiente modo: la distancia sobre la recta real entre __________ y __________ es 2, por lo tanto, hay dos números con esta propiedad, que son __________ y __________.

3. Resuelvan las siguientes ecuaciones.

   a) $(x + 12)^2 = 225$

   b) $(x - 8)^2 = 121$

   c) $(x - a)^2 = 36$, en donde a es un número cualquiera.

Explora

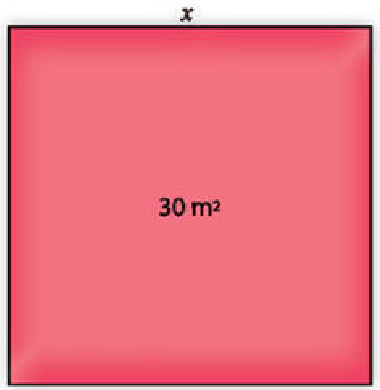
Para reforzar tus aprendizajes accede al siguiente sitio electrónico:

http://www.montereyinstitute.org/courses/Algebra1/COURSE_TEXT_RESOURCE/U10_L1_T1_text_final_es.html

(Consulta: 13 de enero 2015).

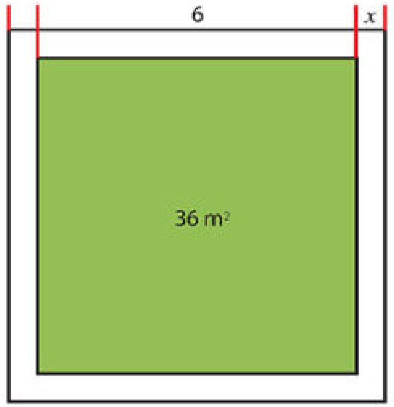
Resuelve los problemas.

1. En la figura se muestra un cuadrado de lado desconocido x; su área es de 30 m^2. ¿Cuánto mide el lado del cuadrado?



   a) Escribe una ecuación que te permita plantear el problema en lenguaje matemático; después responde las preguntas.
   b) ¿Con qué operación puedes encontrar el valor de x, a partir del valor de x^2?
   c) ¿Qué valor esperarías encontrar: un número entre 4 y 5, entre 5 y 6 o entre 6 y 7? ¿Por qué?
   d) Usa tu calculadora para redondear hasta centésimos la medida del lado del cuadrado.

2. Un cuadrado tiene un área de 36 m^2; alrededor de él se desea agregar una cinta a manera de contorno para obtener un cuadrado más grande cuya área sea de 52 m^2. ¿Cuánto debe medir el ancho de esa cinta? Observa la figura para responder las siguientes preguntas.



   a) Tomando en cuenta que el ancho de la cinta es igual a x, ¿cuánto mide cada lado del nuevo cuadrado?
   b) ¿Qué valor se obtiene si ese lado se eleva al cuadrado?
   c) Plantea la ecuación que corresponde a este problema y resuélvela redondeando tu respuesta hasta centésimos.
   d) ¿Puede x ser un número negativo?, ¿por qué?

Lean la siguiente historia y respondan las preguntas.

Al salir de la clase de matemáticas, Elena le comentó a Pedro:

—El número 4 tiene dos raíces cuadradas que son 2 y −2, porque $2^2 = 4$, y también $(-2)^2 = 4$. ¿Estás de acuerdo conmigo?

Pedro pensó un poco y respondió:

—Lo que yo entendí es que cuando calculas la raíz de un número elevado al cuadrado quitas la raíz y el cuadrado, porque se cancelan, como en $\sqrt{2^2} = 2$ o en $\sqrt{5^2} = 5$.

Elena siguió insistiendo.

—Entonces, ¿$\sqrt{(-2)^2} = -2$? Yo no lo creo, porque $(-2)^2$ es 4 y ya habíamos quedado que $\sqrt{4} = 2$.

Para salir de la duda, decidieron preguntarle al profesor y éste les respondió.

—En matemáticas es necesario tener definiciones precisas, como la siguiente:

La raíz cuadrada de un número no negativo es un número positivo o cero, cuyo cuadrado devuelve el valor del primero.

Basándote en la historia anterior, elabora con tus propias palabras un resumen que te permita responder las siguientes preguntas.

a) ¿Cuál es el significado de la raíz cuadrada de un número?

b) ¿Es posible obtener la raíz cuadrada de un número negativo? Justifica tu respuesta.

c) ¿Cuál es el resultado de $\sqrt{-9}$?

d) ¿Cuál es el resultado de $\sqrt{(-3)^2}$?

Lean la segunda parte de la historia de Elena y Pedro.

—Pero entonces profe —dijo Elena— ¿qué significa resolver la ecuación $x^2 = 4$?, pues hay dos números cuyo cuadrado es 4 y uno de ellos es −2.

—Es simple —respondió el profesor—. Recuerden que una raíz cuadrada siempre es positiva, y que una ecuación cuadrática tiene en general dos soluciones. En el caso de $x^2 = 4$, las soluciones son $x = 2$ y $x = -2$. Por ello, es útil comprender el concepto de valor absoluto: decimos que $\sqrt{x^2} = |x|$, "la raíz cuadrada de equis cuadrada es el valor absoluto de equis".

—Entonces la ecuación $x^2 = 25$ tiene dos soluciones: como $\sqrt{x^2} = \sqrt{25}$, tenemos que $|x| = 5$ y hay dos números que cumplen esta propiedad; la primera solución es $x = 5$ porque $|5| = 5$ y la segunda solución es $x = -5$ porque $|-5| = 5$. —Reflexionó Pedro.

—Y la ecuación $x^2 = -25$ no tiene ninguna solución —dijo Elena—, pues no hay ningún número que elevado al cuadrado nos dé −25.

—Lo han comprendido muy bien —respondió el profesor.

Completa los enunciados tomando en cuenta la información anterior.

a) La expresión $\sqrt{x^2} = x$ es incorrecta cuando x es un número ______________; en cambio la expresión $\sqrt{x^2} = |x|$ es correcta sin importar el signo que tenga x.

b) Para resolver la ecuación $x^2 = 4$, calculamos la raíz cuadrada de ambos miembros, es decir $\sqrt{x^2} = \sqrt{4}$ que se puede expresar mediante el uso del valor absoluto como: ______________. Determinamos que los valores ________ y ________ son aquellos cuyo valor absoluto es 2.

c) De lo anterior concluimos que la solución de la ecuación $x^2 = 4$ es $x = \pm 2$, no porque la raíz tenga doble signo, sino porque hay ________ cuyo ______________ es 2.

Realiza en tu cuaderno lo que se indica a continuación.

1. Analiza el planteamiento "x es un número de cualquier signo, cuyo cuadrado es 25".
   a) Escribe la misma idea con una ecuación cuadrática.
   b) Aplica la raíz cuadrada a ambos miembros de la ecuación.
   c) Escribe la ecuación equivalente usando el valor absoluto.
   d) Indica los valores de x que resuelven la ecuación, ¿cuántos son?

2. Sigue el mismo procedimiento para estos enunciados.
   a) "z es un número negativo cuyo cuadrado es 16".
   b) "a es un número positivo cuyo cuadrado es 49".

En algunos problemas, el signo de la variable está bien definido aunque no se diga; por ejemplo, si se solicita "encontrar la medida del lado de un cuadrado cuya área es 36 cm^2", y nunca se dice de forma explícita que el número que se busca es positivo, pero sabiendo que todas las longitudes son positivas, el enunciado debe entenderse como "encontrar el único número positivo cuyo cuadrado es 36".

A continuación se muestran dos procedimientos para resolver la ecuación $(x - 3)^2 = 16$. Uno de ellos es incorrecto, indica cuál es correcto.

Procedimiento A

Al obtener la raíz cuadrada de ambos lados resulta:

$$x - 3 = 4,$$

$$\text{luego } x = 4 + 3.$$

$$\text{Por lo tanto: } x = 7$$

a) ¿Cuántas soluciones tiene la ecuación?

Procedimiento B

Al obtener la raíz cuadrada de ambos lados resulta:

$$|x - 3| = 4,$$

$$\text{por lo tanto: } x - 3 = \pm 4.$$

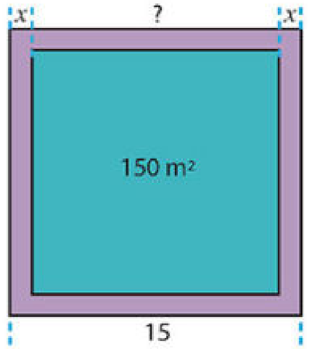
$$\text{Por lo que obtenemos dos ecuaciones: } x - 3 = 4 \text{ y } x - 3 = -4,$$

$$\text{de donde se concluye que } x = 4 + 3 = 7 \text{ o bien } x = -4 + 3 = -1$$

b) ¿Cuántas soluciones tiene la ecuación?, ¿cómo podrías comprobar si esos valores son la solución?

Lee las problemáticas y realiza lo que se solicita.

1. En una porción cuadrada de terreno, de 15 m de lado, se construirá un jardín de césped rodeado por un camino de ancho constante. ¿Cuánto debe medir el ancho del camino para que el cuadrado central de césped tenga 150 m^2 de área?



   a) Expresa el lado del césped central en términos de x
   b) Expresa el área del césped central en términos de x
   c) Establece la ecuación correspondiente al área
   d) Resuelve la ecuación

2. Soluciona los siguientes planteamientos aplicando lo que has aprendido en esta lección.
   a) Encuentra aquellos números cuyo cuadrado, menos 3, es 36.
   b) Determina un número negativo cuyo cuadrado, más 15, es 136.
   c) Encuentra un número positivo cuyo cuadrado, menos 12, es 613.

Analicen y resuelvan los siguientes problemas.

a) Si al cuadrado de un número se le resta cinco veces el mismo número y se obtiene 26, ¿de qué número(s) se trata?
b) ¿Cuáles son los dos enteros cuya suma es 25 y su producto es 6?
c) El producto de dos enteros consecutivos es 6, ¿de qué números positivos se trata?
d) ¿Existe una solución negativa?, ¿cuáles son esos valores?
e) Dos enteros suman −2 y su producto es −3, ¿cuáles son esos números?
f) Si al cuadrado de un número se le suma el doble del mismo número y se obtiene 15, ¿a qué número se refiere el planteamiento?
g) ¿Cuáles son dos enteros cuya suma es 7 y su producto es 10?

Resuelvan las siguientes ecuaciones cuadráticas aplicando lo que aprendieron en los problemas anteriores.

a) $x^2 + 3x + 2 = 0$

b) $x^2 - x - 2 = 0$

c) $x^2 + x - 2 = 0$

d) $x^2 + 3x - 88 = 0$

e) $x^2 + 19x + 88 = 0$

f) $x^2 - 13x + 42 = 0$

g) $x^2 + 11x + 24 = 0$

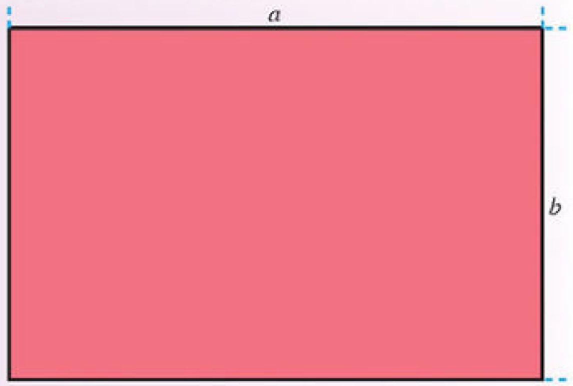
h) $x^2 - 2x - 15 = 0$

Presenten al grupo los procedimientos que siguieron para resolver las ecuaciones y los resultados obtenidos.

En equipos, analicen, discutan y resuelvan el siguiente problema.

Construyendo Matemáticas

Un terreno rectangular de 4 200 m² fue cercado completamente con 260 m de malla, ¿cuáles son sus dimensiones?



a) ¿Cuál es la expresión que representa el perímetro en términos de a y b?

b) ¿Cuál es la expresión que representa el área en términos de a y b?

c) ¿Cuál es la ecuación cuadrática que se plantea a partir de los datos?

Reunidos en parejas, realicen lo que se indica.

a) ¿Qué números resuelven la ecuación $(x - 4)(x - 3) = 0$?

b) Usando la propiedad distributiva, desarrollen el producto $(x - 4)(x - 3)$ para plantear una ecuación cuadrática de la forma $x^2 + Bx + C = 0$, equivalente a la de la pregunta anterior.

c) ¿Qué relación tienen las soluciones de esta ecuación con los coeficientes B y C?

d) Resuelvan la ecuación cuadrática $x^2 + 7x - 8 = 0$

Resuelvan las siguientes ecuaciones.

a) $x^2 - 2x - 35 = 0$

b) $4x^2 + 4x - 35 = 0$

c) $x^2 + 2x - 3 = 0$

A partir de sus aprendizajes, completen los siguientes enunciados y obtengan conclusiones en torno a las raíces de una ecuación.

a) Si existen dos enteros a y b cuya suma es __________ y su producto es __________, entonces las soluciones de la ecuación $x^2 + Bx + C = 0$ son $x = -a$ y $x = -b$.

b) Como $5 - 3 = 2$ y $(5)(-3) = -15$, las soluciones de la ecuación $x^2 + 2x - 15 = 0$ son $x =$ __________ y $x =$ __________.

c) Como $5 + 4 = 9$ y $(5)(4) = 20$, entonces $x = -5$ y $x = -4$ son soluciones de la ecuación ____________________.

d) Las soluciones de la ecuación $x^2 - 11x + 24 = 0$ son $x =$ __________ y $x =$ __________.

e) Las **raíces** de la ecuación $x^2 + 10x + 25 = 0$ son $x =$ __________ y $x =$ __________.

Los resultados obtenidos en este ejercicio también se llaman raíces de **multiplicidad** dos o **raíces dobles**, ya que un solo valor representa las dos soluciones de la ecuación. Reciben este nombre porque son dos números que permiten que se cumpla la igualdad en la ecuación.

La ecuación $x^2 + Bx + C = 0$ no tiene soluciones enteras porque no existen dos números enteros cuya suma sea _______________ y su producto sea ____________________.

Como puedes apreciar, los resultados obtenidos en los ejercicios anteriores son números enteros. Más adelante, en el bloque 3, aprenderás a resolver ecuaciones cuadráticas cuyas soluciones no son números enteros.

Palabra Mu

multiplicidad. Es el número de veces que la raíz es solución de una ecuación.

raíces (de una ecuación). Son las soluciones de una ecuación.

raíces dobles o de multiplicidad dos. Nombres que reciben las dos soluciones de una ecuación cuadrática cuando éstas son iguales.

Para reflexionar, realiza los ejercicios y determina las soluciones de las siguientes ecuaciones cuadráticas.

a) En la ecuación $x^2 - 16 = 0$ se puede observar la diferencia del término cuadrático (x^2) y el término independiente (16). Expresa la misma ecuación de tal forma que se observe un término cuadrático, un término lineal y un término independiente.

__________ + __________ + __________ = 0

b) A partir de tu resultado establece las soluciones $x =$ __________ y $x =$ __________ de la ecuación.

c) El resultado de la ecuación $x^2 - 25 = 0$ es $x =$ __________ y $x =$ __________.

d) Escribe una conclusión relacionada con las soluciones de este tipo de ecuaciones cuadráticas.

Te sugerimos leer la novela *El hombre que calculaba* de Malba Tahan, 2002, donde encontrarás problemas y curiosidades matemáticas para motivar tu aprendizaje.

Forma, espacio y medida

Figuras y cuerpos

Construcción de figuras congruentes o semejantes
(triángulos, cuadrados y rectángulos) y análisis de sus propiedades

Reactivando el saber

Un mundo de imágenes

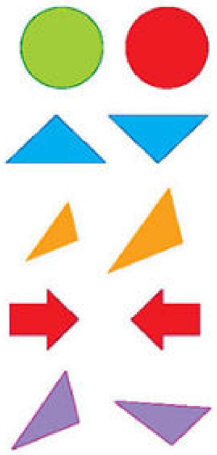
Cuando queremos reconocer similitudes y diferencias entre objetos, tomamos en cuenta atributos como forma, tamaño, color, temperatura, textura, olor, sabor, sonidos, etcétera.

Asigna a cada atributo el sentido que te permite reconocerlo, siendo éstos la Vista (V), el Oído (O), el Gusto (G), el Tacto (T) o el Olfato (F), y añade en los espacios vacíos algunos atributos más:

Tamaño		Forma		Color		Temperatura		Grosor	
Textura		Altura		Olor		Sabor		Ruido	
Brillo		Opacidad		Posición					

Quizá, la vista es el sentido al que más recurrimos para reconocer el mundo en el que vivimos.

Observa las siguientes figuras y determina si son iguales o diferentes. Escribe sobre las líneas lo que se solicita.



Son __________. Tienen igual __________, pero diferente __________.

Son __________. Tienen igual __________, pero diferente __________.

Son __________. Tienen igual __________, pero diferente __________.

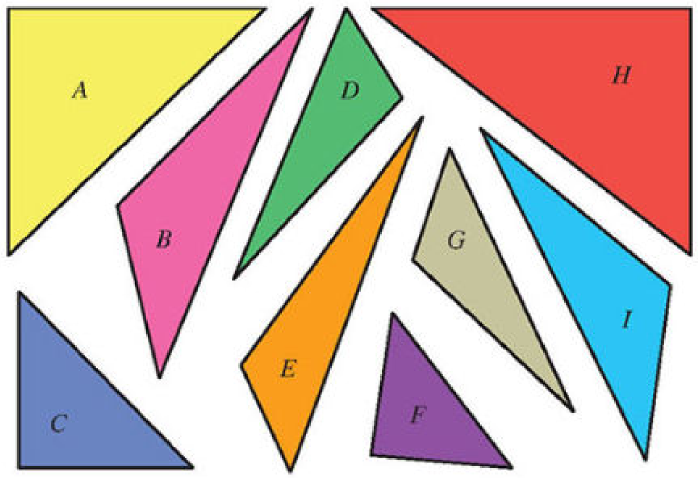
Son __________. Tienen igual __________, pero diferente __________.

Son __________. Tienen igual __________, pero diferente __________.

Comparen sus respuestas con las de otros compañeros.

Como te habrás dado cuenta, los conceptos “igual” y “diferente” pueden ser confusos. Por eso, en matemáticas, hay definiciones precisas que tienen que ver con la forma de los objetos, dejando de lado el color, la posición o la orientación de los mismos.

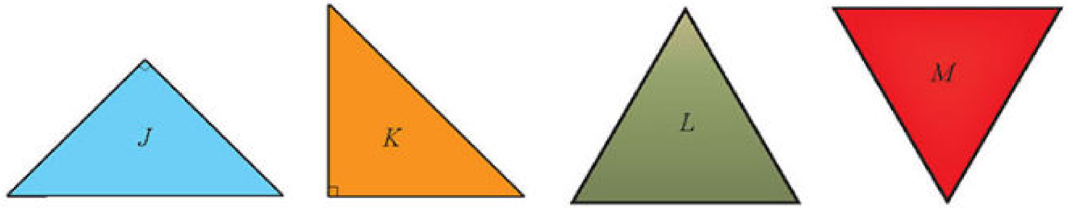
Observa los siguientes triángulos, agrúpalos de manera que, los que tienen la misma forma, queden juntos.



Comparen su clasificación con las de algunos de sus compañeros y respondan las siguientes preguntas.

a) ¿Obtuvieron todos los mismos resultados?
b) ¿Alguien calcó y recortó los triángulos? Intenten hacerlo.
c) ¿Alguien midió ángulos y/o lados? ¿Cómo son los lados y ángulos de los triángulos que tienen la misma forma?
d) ¿Alguien usó una estrategia diferente? Descríbanla.

Conecta con una línea las figuras que tienen la misma forma. Posteriormente, responde lo que se solicita.



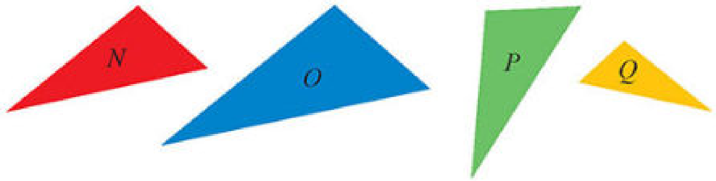
a) ¿Cómo decidiste que tienen la misma forma?
b) ¿Qué significado le darías a la frase “tienen la misma forma”?
c) ¿En qué son diferentes los triángulos que no relacionaste? Justifica tu respuesta.

En segundo grado aprendiste el concepto de figuras “congruentes”, para recordarlo diremos que: *dos figuras son congruentes si tienen la misma forma y tamaño.* En un lenguaje más preciso podemos decir que:

Dos figuras son congruentes si es posible hacerlas coincidir girándolas o volteándolas de alguna forma conveniente.

Es decir, son congruentes cuando tienen la misma forma y tamaño, sin importar su posición, orientación o ángulo de inclinación.

Así como existen figuras congruentes, las hay también *semejantes*. En la actividad anterior, ¿cuáles pares resultaron congruentes?________________. Las siguientes figuras no son congruentes, pero todas son semejantes entre sí.



Descubre las diferencias que hay entre las figuras anteriores. Escribe sobre la línea la letra de las figuras que cumplan con lo que se indica.

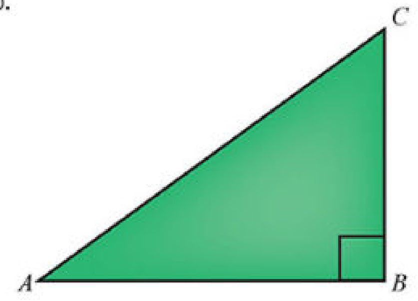
a) Tienen distinto tamaño (que N): ________________

b) Tienen distinto ángulo de inclinación (que N): ________________

c) Tienen distinta orientación (que N): ________________

Realicen las siguientes actividades para que descubran qué significa que dos figuras tienen “la misma forma”.

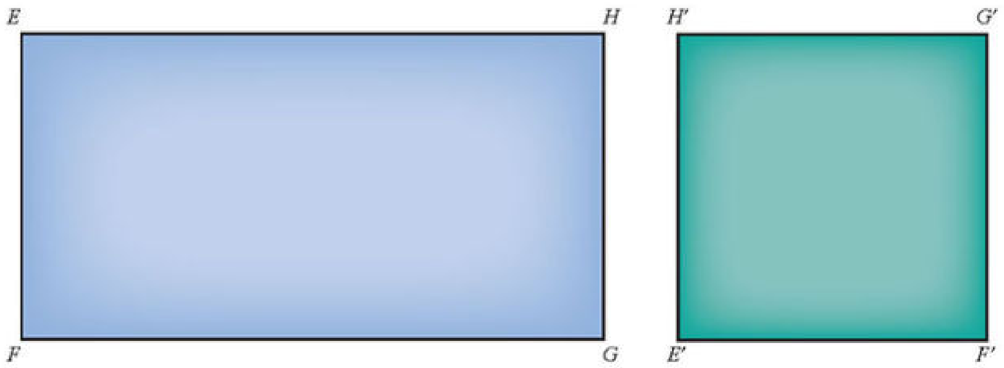
1. Observen el triángulo ABC, cópienlo sobre cartulina y recórtenlo. A continuación, tracen el triángulo $A'B'C'$, que será una ampliación de ABC, usando un factor de crecimiento de 1.5 y también recórtenlo.



a) ¿Consideran que ABC y $A'B'C'$ tienen la misma forma? ¿Por qué?

b) ¿La forma de las figuras cambia si las giran, las voltean o las modifican de color? Justifiquen su respuesta.

2. Observen y comparen los siguientes cuadriláteros.



a) ¿Podrían decir que son figuras a escala?__________ ¿Por qué?________________

b) Definan con sus propias palabras el concepto de figuras a escala.

c) ¿Podrían ampliar o reducir a $EFGH$ para hacerlo coincidir con $E'F'G'H'$? Expliquen su respuesta.

d) ¿Podrían decir que $EFGH$ y $E'F'G'H'$ tienen la misma forma? Argumenten su respuesta.

La idea de reproducción a escala es clave para entender por qué dos figuras tienen la misma forma. Analicen y respondan las siguientes preguntas.

a) ¿Consideran que dos figuras a escala tienen la misma forma, aunque se encuentren giradas o volteadas? Expliquen su respuesta.

b) ¿Existen dos figuras de igual forma, pero que no estén a escala? __________ ¿Por qué?

c) ¿Existen dos figuras que estén a escala, pero que no tengan la misma forma? Expliquen su respuesta. ________________

d) Para afirmar que dos figuras tienen la misma forma, ¿es suficiente encontrar un factor de escala que las iguale en tamaño y que las haga coincidir, ya sea volteándolas o girándolas? Argumenten su respuesta. ________________

e) Si dos figuras no coinciden, pero tienen la misma forma ¿será cierto que una de ellas es una ampliación de la otra? Justifiquen su respuesta. ________________

Compartan sus argumentos con el grupo y escriban conclusiones respecto a la validez o no del siguiente enunciado:

“Ser figuras a escala es lo mismo que ser figuras con la misma forma”.

Construyendo Matemáticas

Usen los triángulos que recortaron en la actividad anterior para realizar los siguientes ejercicios.

1. Observen el triángulo ABC, cópienlo sobre cartulina y recórtenlo. A continuación, tracen el triángulo $A'B'C'$, que será una ampliación de ABC, usando un factor de crecimiento de 1.5 y también recórtenlo.

Medidas de los lados			Razones entre las medidas de los lados		
$A'B' =$	$B'C' =$	$C'A' =$	$\frac{A'B'}{B'C'} =$	$\frac{B'C'}{C'A'} =$	$\frac{C'A'}{A'B'} =$
$AB =$	$BC =$	$CA =$	$\frac{AB}{BC} =$	$\frac{BC}{CA} =$	$\frac{CA}{AB} =$

2. Comparen las razones entre los lados del triángulo ABC, con los del triángulo $A'B'C'$.
   a) Deduzcan el factor de ampliación k, calculando los cocientes $\frac{A'B'}{AB}$, $\frac{B'C'}{BC}$ y $\frac{C'A'}{CA}$. Usen el factor para escribir las relaciones $A'B' = k\,AB$, $B'C' = k\,BC$ y $C'A' = k\,CA$.
   b) Usando las relaciones anteriores, calculen y simplifiquen los cocientes.

   $\frac{A'B'}{B'C'} + \frac{k\,AB}{k\,BC} =$ _____, $\frac{B'C'}{C'A'} + \frac{k\,BC}{k\,CA} =$ _____, y $\frac{C'A'}{A'B'} + \frac{k\,CA}{k\,AB} =$ _____

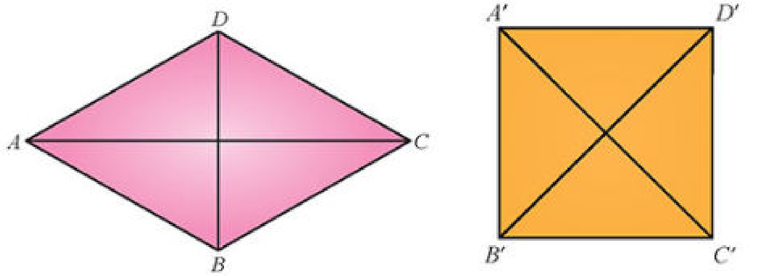
   Observen lo que ocurre con el factor de escala k, al encontrarse en el numerador y en el denominador.
   c) Comparen las proporciones entre los lados $\frac{AB}{BC}$, $\frac{BC}{CA}$, $\frac{CA}{AB}$ con las proporciones $\frac{A'B'}{B'C'}$, $\frac{B'C'}{C'A'}$, $\frac{C'A'}{A'B'}$ que reportaron en la tabla.
   d) ¿Qué pueden concluir con relación al factor de escala y la proporción entre los lados del triángulo?
3. Completen la siguiente tabla y comparen las razones entre los lados de los cuadriláteros $EFGH$ y $E'F'G'H'$ anteriores.

Medidas de los lados				Razones entre las medidas de los lados					
$EF =$		$GH =$		$\frac{E'F'}{F'G'} =$		$\frac{GH}{HE} =$		$\frac{EF}{HE} =$	
$FG =$		$HE =$		$\frac{FG}{GH} =$		$\frac{EF}{GH} =$		$\frac{FG}{HE} =$	
$E'F' =$		$G'H' =$		$\frac{E'F'}{F'G'} =$		$\frac{G'H'}{H'E'} =$		$\frac{E'F'}{H'E'} =$	
$F'G' =$		$H'E' =$		$\frac{F'G'}{G'H'} =$		$\frac{E'F'}{G'H'} =$		$\frac{F'G'}{H'E'} =$	

   a) ¿Qué relación hay entre las medidas de los segmentos de un cuadrilátero y sus correspondientes en el otro?
   b) ¿Qué relación hay entre las razones de los lados en un cuadrilátero y sus correspondientes en el otro?

Como resultado de la actividad anterior, se puede afirmar que dos figuras tienen la misma forma si existe proporcionalidad entre cada segmento de una figura y el segmento correspondiente en la otra (puede ser un lado, una diagonal, un diámetro; o la distancia entre dos puntos cualesquiera de una figura, siempre que se compare con la distancia entre los dos puntos correspondientes de la otra).

Observa las figuras y realiza lo que se solicita.



a) ¿Cómo son las longitudes de los segmentos AB, BC, CD y DA con sus correspondientes $A'B'$, $B'C'$, $C'D'$ y $D'A'$? ¿Sucederá lo mismo con todos los segmentos correspondientes de las figuras? Justifica tu respuesta.

b) Encuentra al menos dos segmentos del rombo que no tengan el mismo tamaño que sus correspondientes en el cuadrado.

c) Determina si la siguiente afirmación es correcta: *Dos figuras tienen la misma forma, si algunos segmentos de una son proporcionales a los correspondientes en la otra.* Argumenta tu respuesta.

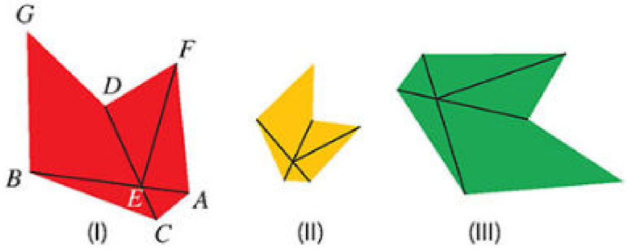
Apóyense en las figuras para que realicen lo que se solicita.

a) Escriban en las figuras (II) y (III), las letras de los puntos correspondientes.

b) Son congruentes: _____ y _____.

c) Son semejantes: _____ y _____.

d) ¿Por qué siendo congruentes, no puede decirse que son iguales? Expliquen su respuesta.



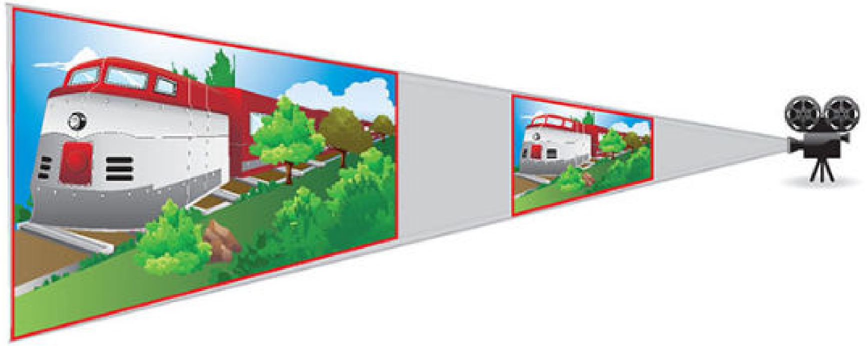
A continuación se presentan las definiciones formales de semejanza y congruencia, escríbanlas en sus cuadernos con sus propias palabras y ejemplifíquenlas con dos figuras semejantes y dos congruentes.

Dos figuras son semejantes si para cada punto de una, es posible encontrar el punto correspondiente en la otra, y la distancia entre dos puntos cualesquiera de una de las figuras es proporcional a la distancia entre los puntos correspondientes de la otra.

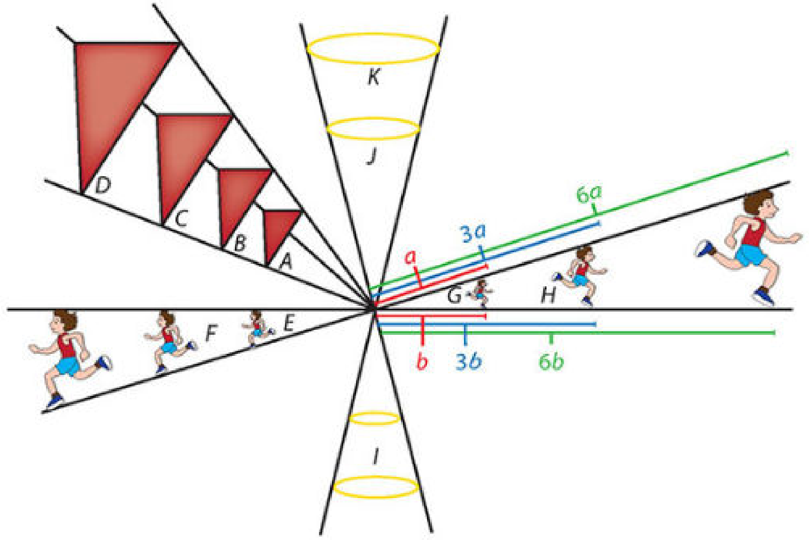
Dos figuras son congruentes si para cada punto de una, es posible encontrar el punto correspondiente en la otra, y la distancia entre dos puntos cualesquiera de una de las figuras coincide con la distancia entre los puntos correspondientes de la otra.

Una máquina que agranda

Los proyectores clásicos de cine basan su funcionamiento en una lámpara que emite luz muy potente, la cual atraviesa una película transparente en donde están las imágenes. Los rayos de luz viajan en línea recta y proyectan la imagen sobre una pantalla plana que se encuentra ubicada más adelante. El efecto de proyección se obtiene trazando líneas rectas a partir de un punto, multiplicando así todas las distancias por un determinado factor. A partir de la siguiente imagen se puede apreciar fácilmente que el efecto de proyección es, en realidad, un método para hacer reproducciones a escala.



En el plano, este procedimiento es conocido como homotecia y es una transformación que multiplica el tamaño sin cambiar la forma, es decir, no altera las proporciones que hay entre los puntos de las figuras, por lo tanto, ¿cómo son las figuras transformadas con una homotecia respecto a la original?

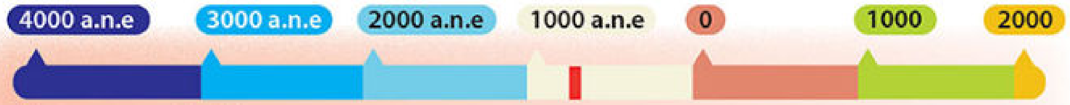


a) Escribe cuatro pares de figuras semejantes: ___ y ___, ___ y ___, ___ y ___, ___ y ___.

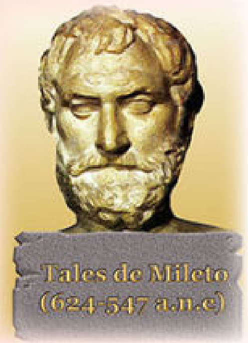
b) Escribe algunos pares de figuras congruentes: ___ y ___, ___ y ___, ___ y ___.

Para esta secuencia didáctica te sugerimos la lectura *El misterioso jarrón multiplicador* de Mitsumasa Anno, 2007.

Matemáticas en el pasado

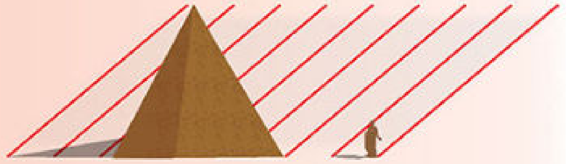


El teorema de Tales


Tales de Mileto (624-547 a.n.e)

A Tales de Mileto se le considera el primer filósofo de la historia y el más famoso de los Siete Sabios de Grecia. Herodoto cuenta que Tales predijo el momento en el que sucedería un eclipse solar cerca del año 585 a.n.e., y dio una explicación científica del fenómeno. Se dice que fue el primero en dividir el año en cuatro estaciones y en 365 días. También se le atribuye haber realizado la medición de la pirámide de Keops, midiendo la longitud de su sombra en el momento en que la sombra del propio Tales igualaba su estatura; esta idea es consecuencia de lo que hoy se conoce como teorema de Tales, que asegura:

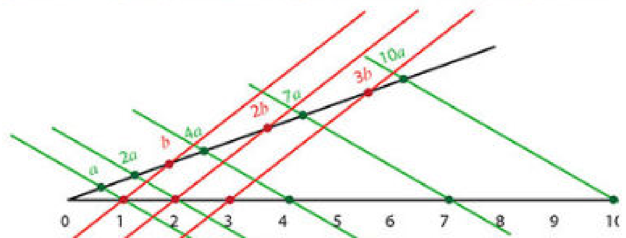
"una familia de rectas paralelas que cortan a dos rectas determinan en ellas segmentos proporcionales"



Tales sabía que la luz del Sol llega a la Tierra en forma de rayos paralelos y eso le permitió aplicar su teorema al problema de medir la altura de la pirámide.

Fuente: Pérez, Sergio, 2013.

Observa la siguiente figura, analízala y responde las preguntas.



Las paralelas verdes cortan a la recta horizontal en los puntos marcados con 1, 2, 4, 7 y 10, y determinan en la recta oblicua los puntos a, $2a$, $4a$, $7a$ y $10a$. Las paralelas rojas cortan a la recta horizontal en los puntos 1, 2 y 3, y determinan en la recta oblicua los puntos b, $2b$ y $3b$. ¿Cómo es la distancia de 0 a $3b$ con respecto a la distancia de 0 a b?, ¿cómo es con respecto de la distancia de 0 a $2b$?

a) Usa una regla graduada en milímetros para verificar que la distancia entre 0 y $7a$ es 7 veces la distancia entre 0 y a, y que la distancia de 0 a $10a$ es 5 veces la distancia de 0 a $2a$.

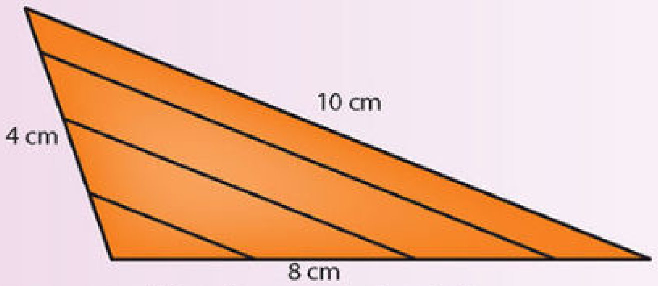
b) Mide las distancias que corresponden y calcula las siguientes razones.

$$\frac{dist(2,10)}{dist(2a,10a)} = \_\_\_\_,\quad \frac{dist(0,7)}{dist(0,7a)} = \_\_\_\_,\quad \frac{dist(4,10)}{dist(4a,10a)} = \_\_\_\_.$$

c) ¿Qué observas de las razones? ¿Cuáles son tus conclusiones?

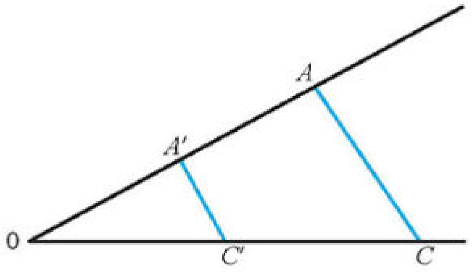
Realiza lo que se solicita a continuación.

En cartulina o papel grueso traza un triángulo cuyos lados midan 4, 8 y 10 cm; recórtalo y marca con un punto azul el vértice donde se unen los lados que miden 4 y 8 cm. Divide cada uno de esos lados en mitades y cuartas partes; une los puntos trazando segmentos paralelos al lado que mide 10 cm, tal como se muestra en la figura.



a) ¿Cuánto crees que mida cada segmento trazado?
b) Toma las medidas de los segmentos y compáralas con el lado que mide 10 cm.
c) Si tomamos 10 cm como la unidad, ¿qué fracción de ésta corresponde a cada segmento?
d) ¿Por qué crees que obtuviste estos resultados?

Relación del teorema de Tales con la homotecia



Si se tiene un triángulo AOC y se quiere reducir en una razón dada, digamos $\frac{1}{2}$, es posible trazar una recta paralela al segmento CA que pase por el punto medio de AO.
¿Qué permite asegurar que esa paralela cortará al segmento OC en su punto medio?
Si nombramos A' al punto medio de OA y C' al punto donde esa paralela corta al segmento OC, descubriremos que se ha formado un triángulo $A'OC'$ y que sus lados $A'O$ y OC' miden la mitad de los lados AO y OC, respectivamente. Dicho de otro modo:

Si $A'O = \frac{AO}{2}$, entonces $OC' = \frac{OC}{2}$ y como los ángulos de ambos triángulos son iguales se tiene que $\angle A'OC' = \angle AOC$, $\angle OC'A' = \angle OCA$, y $\angle C'A'O = \angle CAO$ de donde obtenemos que $C'A' = \frac{C'A'}{2}$

Con base en el argumento anterior respondan lo que se solicita a continuación.

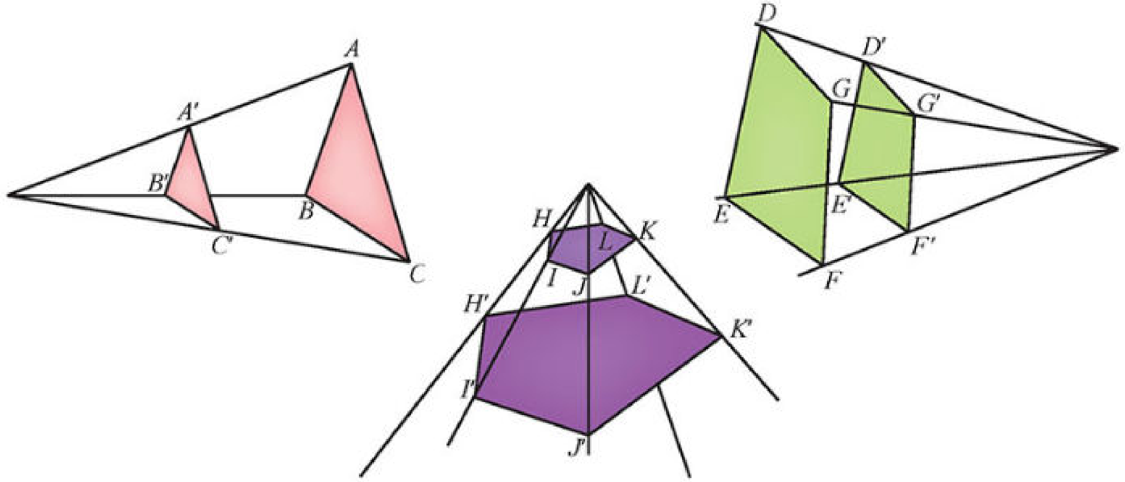
a) ¿Consideran que el argumento anterior es válido para cualquier razón que se tome, sea menor o mayor que 1? Justifiquen su respuesta.

b) Lean la conclusión del argumento anterior para responder la pregunta.

Toda recta paralela a un lado de un triángulo forma con las rectas que pertenecen a los otros dos lados un nuevo triángulo semejante al primero (con excepción de aquella paralela que pasa exactamente por el punto de intersección de los otros dos lados).

¿Por qué es necesario hacer una excepción a la conclusión?

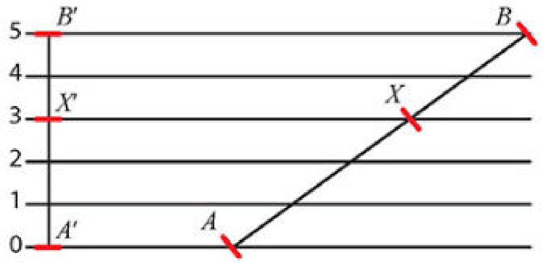
Observa las figuras y explica si es cierto o no que las figuras $A'B'C'$, $D'E'F'G'$ y $H'I'J'K'L'$ son proporcionales a ABC, $DEFG$ y $HIJKL$, respectivamente. Justifica tu respuesta.



Puesto que el teorema de Tales asegura que una familia de rectas paralelas que cortan a dos rectas determina en ellas segmentos proporcionales, resulta interesante como aplicación de este teorema, poder dividir cualquier segmento en una razón dada, para ello basta con cruzar adecuadamente el segmento con un haz de paralelas.

Aplica el teorema de Tales.

En la gráfica que se muestra, el punto X está dividiendo al segmento AB en cierta razón, a primera vista desconocida.



a) El segmento vertical $A'B'$ también está dividido por X' en una razón que es más evidente, dada por el cociente $\frac{A'B'}{A'X'}$ ¿Cuál es esa razón? __________.

b) Para aplicar aquí el teorema de Tales, identifica y menciona cuál es la familia de rectas paralelas __________.

c) Identifica y menciona cuáles son las dos rectas que esta familia cruza __________.

d) Decide, por lo tanto, en qué razón está dividiendo X al segmento AB: __________.

Explora

Ingresa al siguiente sitio electrónico para que realices las actividades que ahí se presentan.
http://www.librosvivos.net/smtc/homeTC.asp?TemaClave=1224
(Consulta: 20 de agosto de 2014).

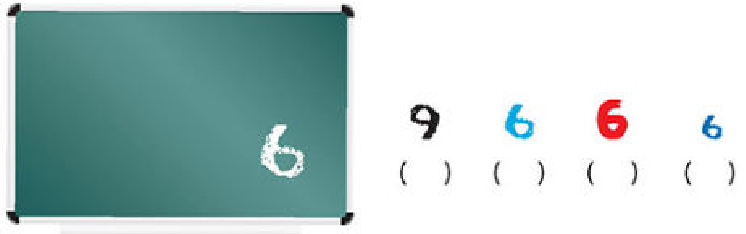
Explicitación de los criterios de congruencia y semejanza de triángulos a partir de construcciones con información determinada

Reactivando el saber

Algunas veces nuestros ojos nos engañan. Creemos lo que vemos y suele suceder que lo que vemos nos da una idea equivocada de las cosas. A esto se le denomina "ilusión óptica" o "efecto visual". Un ejemplo de ello es cuando en medio del desierto o una carretera muy calurosa, se perciben charcos de agua en el suelo, pero en realidad no están allí. ¿Alguna vez has experimentado ilusiones ópticas?, ¿cuándo?

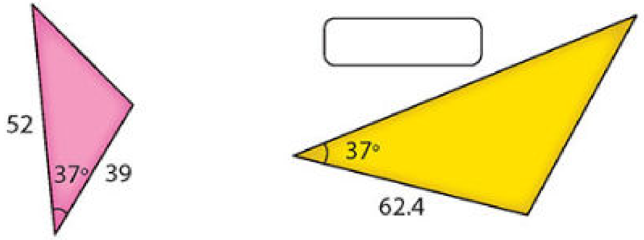
Realiza las siguientes actividades.

1. Marca con una (S) la figura que es semejante a la que se encuentra en el pizarrón.



   a) Existe algún par de figuras que sean congruentes. Enciérralas en un círculo.

2. El triángulo amarillo se construyó reflejando, girando y aplicando una homotecia al triángulo rosa, por lo tanto, ambos triángulos son semejantes.



   a) ¿Cuál es el factor de homotecia que se aplicó?

   b) Calcula cuánto mide el lado que se pide en el triángulo amarillo.

   c) ¿En qué proporción se encuentran los lados adyacentes señalados en cada triángulo?

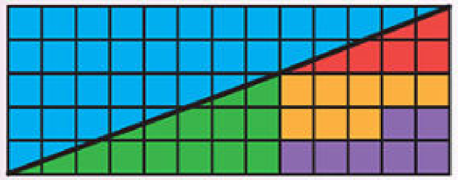
Construyendo Matemáticas

¿Dónde está el cuadrito?

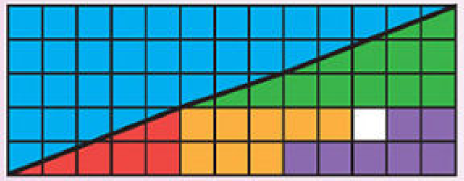
El popular juego conocido como "rompecabezas" consiste en mover piezas y acomodarlas de manera que se forme una imagen, una figura, etcétera. Esencialmente, al mover una pieza le estamos aplicando una transformación rígida, que ya sabemos que no altera su forma ni su tamaño, por lo tanto, el área de cada pieza no cambia al ser movida. A continuación, te presentamos un rompecabezas muy interesante.

Sigue las indicaciones para construir el rompecabezas y responde lo que se solicita.

Para crearlo necesitas un rectángulo de 13 cm de base por 5 cm de altura, dividido en piezas como se observa en la figura a escala.



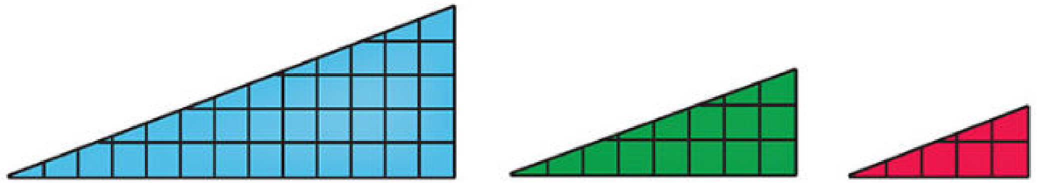
1. Recorta el rectángulo y separa las piezas; ahora sigue algo en verdad extraño.
2. Reorganiza las piezas para formar nuevamente el rectángulo como aparece en la siguiente figura, pero ¿qué ha ocurrido?



3. Un centímetro cuadrado se perdió, lo único que hicimos fue reacomodar las piezas, entonces ¿dónde está el cuadrito?

Discutan en torno a lo que ha ocurrido y justifiquen sus respuestas.

Observen cuidadosamente las tres piezas triangulares.



1. ¿Son triángulos semejantes?, ¿por qué?
2. Los triángulos azul, verde y rojo del rompecabezas parecen tener la misma forma, sin embargo, ¿cómo saber si esto es cierto o sólo lo parecen a simple vista?, ¿cómo verificar si los triángulos tienen la misma forma aunque sean de diferente tamaño?

Criterios de semejanza

Realicen lo que se indica a continuación y determinen los criterios de semejanza.

1. Comparen los tres ángulos de los triángulos anteriores, ¿cómo son entre ellos?
   a) Una vez comparados los ángulos, ¿podrían afirmar que son triángulos semejantes? Justifiquen su respuesta.
   b) Escriban una generalización del resultado anterior.
   c) Seguramente, observaron que si en dos triángulos sus ángulos correspondientes tienen la misma medida, entonces los triángulos tienen la misma forma (aunque pueden tener diferente tamaño).

Criterio de semejanza de triángulos (AAA): Si dos triángulos tienen los mismos ángulos, entonces son triángulos semejantes.

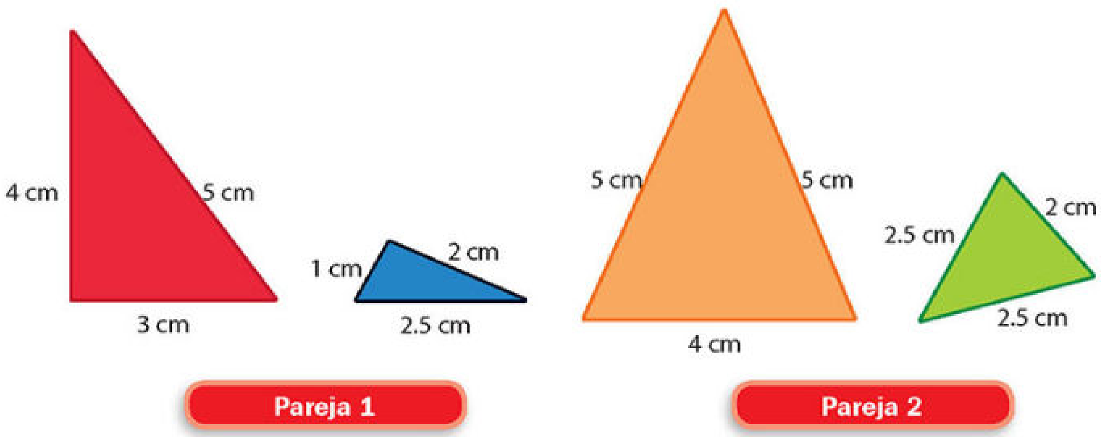
¿Será necesario comparar los tres pares para verificar que son triángulos semejantes?

   d) ¿Cuánto vale la suma de los tres ángulos internos de cualquier triángulo? Si se conoce la medida de dos de los tres ángulos de un triángulo, ¿será necesario medir el tercero?, ¿por qué?
   e) Tomando en cuenta sus resultados, escriban una versión del criterio de semejanza de triángulos anterior que incluya menos datos.

Primer criterio de semejanza de triángulos (AAA): ______________________________

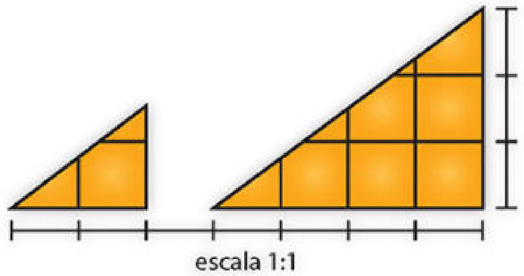
____

2. Observen las siguientes parejas de triángulos y comparen la longitud de sus lados.



   a) Las parejas mostradas, ¿representan triángulos semejantes? Justifiquen su respuesta.
   b) ¿Existe alguna relación entre las medidas de los lados de cada pareja de triángulos? Expliquen su respuesta.

3. Las medidas de los siguientes triángulos son 2 cm, 1.5 cm y 2.5 cm en el triángulo pequeño, y 4 cm, 3 cm y 5 cm en el triángulo grande.

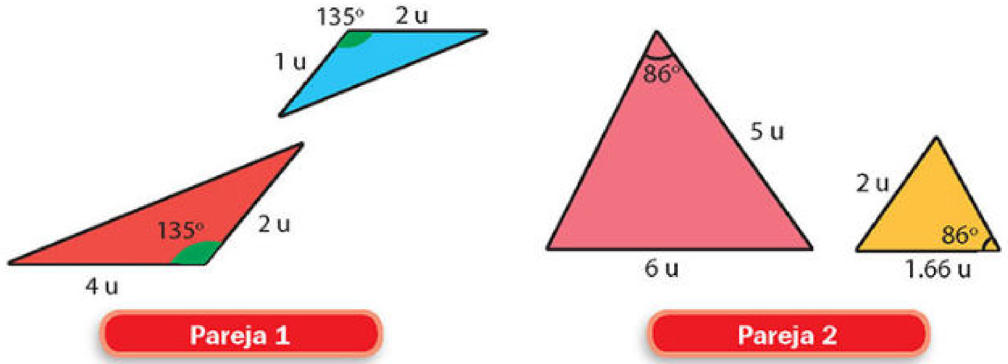


   a) Dividan las longitudes de los lados correspondientes de los triángulos, es decir $\frac{4}{2}$, $\frac{3}{1.5}$ y $\frac{5}{2.5}$. ¿Cómo es la razón entre cada pareja de lados?
   b) Dado lo anterior, ¿pueden afirmar que los triángulos son semejantes? ¿Cómo son las medidas del triángulo grande con respecto del pequeño?
   c) Utilicen este criterio para comparar los tres triángulos de la actividad anterior. ¿Son semejantes? Expliquen su respuesta.
   d) ¿Qué condición debe pedirse a los lados de dos triángulos para garantizar que son semejantes?

Escriban el segundo criterio de semejanza de triángulos (LLL): ______________________________

____

4. Observen las siguientes parejas de triángulos.



   a) A partir de los datos proporcionados, determinen qué triángulos son semejantes y por qué.
   b) ¿Qué deben cumplir los lados y ángulos para que los triángulos sean semejantes?
   c) A partir de sus argumentos, redacten el tercer criterio de semejanza.

Tercer criterio de semejanza de triángulos (LAL): ______________________________

____

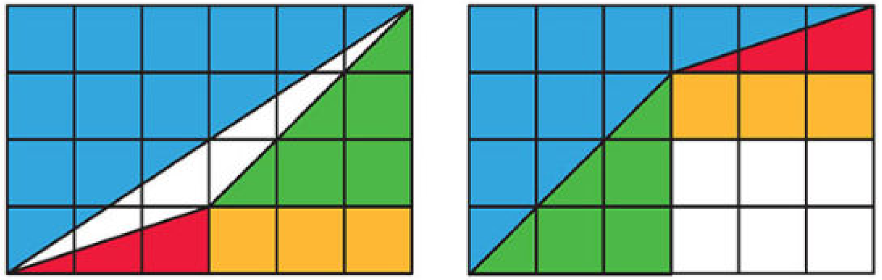
5. Si tienen dos triángulos y conocen la medida de dos de sus ángulos y la longitud del lado que los une, ¿qué criterio deben cumplir para que los triángulos sean semejantes?
   a) Tracen tantos triángulos como consideren necesario para justificar sus repuestas.
   b) Escriban el cuarto criterio de semejanza de triángulos (*ALA*): ______________________

   ____

   c) ¿Qué diferencia encuentran entre el tercer y cuarto criterio de semejanza?

El misterio del cuadrito perdido

El efecto visual que provocan las figuras del rompecabezas del inicio hace suponer que para los tres triángulos la inclinación de la diagonal es la misma (otra manera de decir que son semejantes), pero no es así. En el siguiente ejemplo se hace una exageración de lo que ocurre con las figuras que presentamos inicialmente; aquí puedes observar lo que en realidad sucede.



Observa ambas figuras, en las que las piezas aparecen con distintos acomodos, y responde lo que se solicita.

a) ¿Coinciden los lados superiores de los triángulos verde y rojo con la diagonal del rectángulo principal?
b) ¿Cuál es el área faltante en la primera figura?
c) ¿Cuál es el área faltante en la segunda figura?
d) ¿Cómo explicas el hecho de que no coincidan?

Revisen el extraño caso del rompecabezas inicial, observen los triángulos rojo, verde y azul que en él aparecen.

1. ¿Son figuras semejantes? Expliquen su respuesta.
2. Comparen las razones entre los lados cortos de los tres triángulos y las razones entre los lados largos y completen las tablas.

Cocientes entre los lados cortos		
$\frac{azul}{rojo} = \frac{5}{2}$	$\frac{verde}{rojo} = \_\_$	$\frac{azul}{verde} = \_\_$

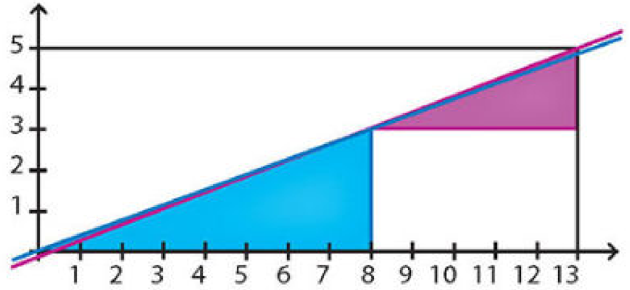
Cocientes entre los lados largos		
$\frac{azul}{rojo} = \_\_$	$\frac{verde}{rojo} = \_\_$	$\frac{azul}{verde} = \_\_$

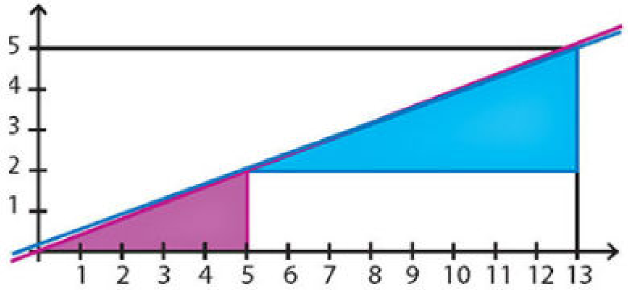
a) ¿Consideran que los tres triángulos tienen la misma forma? Justifiquen su respuesta.
b) Ahora calculen los cocientes que les permitan medir la pendiente en cada triángulo; para ello, dividan la longitud del lado corto entre la longitud del lado largo.

Pendientes de los triángulos		
Triángulo rojo	**Triángulo verde**	**Triángulo azul**
Pendiente =	*Pendiente* =	*Pendiente* =

c) ¿La pendiente es igual en los tres triángulos?

A simple vista, la diferencia es casi imperceptible, pero el criterio de los cocientes es muy claro, si los cocientes no son iguales, los triángulos no son semejantes. Lo que aparenta ser la diagonal del rectángulo no es una línea recta, ya que en la primera figura se tiene un punto por debajo de la diagonal y en la segunda figura se tiene un punto por encima de la misma.





La explicación del "misterio del cuadrito perdido" se dio en las dos figuras que aparecen en la actividad anterior; la situación es la misma, pero en el rompecabezas inicial las figuras son tan parecidas que, a simple vista, no es claro que no son semejantes.

Utilicen los criterios de semejanza para argumentar si los triángulos del rompecabezas son semejantes y justifiquen sus respuestas.

Medir el diámetro del Sol

Hasta el día de hoy resulta humanamente imposible volar hasta el Sol y rodearlo con una cinta para medirlo, entonces ¿cómo es posible conocer sus medidas? Más aún, ¿cómo podemos calcularlas si no contamos con naves espaciales ni trajes que nos permitan acercarnos a él?

Con lo que has aprendido hasta ahora puedes calcular una buena aproximación del diámetro solar. Descubre cómo en la siguiente actividad.

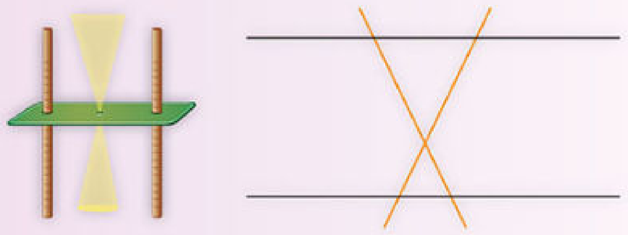
Realicen la siguiente actividad en un día soleado.

1. Consigan una tarjeta de cartulina y háganle una perforación de 1 mm. Uno de ustedes sostendrá la tarjeta a la altura necesaria para que la luz que pase a través del agujero enfoque un círculo perfecto sobre el suelo. Una vez conseguido esto, el otro compañero marcará el diámetro de la imagen solar que se ha proyectado y medirá la altura a la que se ha colocado la tarjeta. De preferencia, busquen la forma de fijarla sobre un par de varillas paralelas (agujas de tejer o palitos redondos y largos) sobre las cuales se deslice, para que sus medidas sean lo más precisas posible.

Palabra Mu

Unidad Astronómica (UA). es la distancia entre la Tierra y el Sol y equivale aproximadamente a 149 597 870 km.

Esta unidad de medida se utiliza para calcular distancias entre planetas y cuerpos cercanos al Sistema Solar.



2. Observen el esquema anterior, éste es suficiente para mostrar que la razón entre el diámetro solar (d_s) y la **Unidad Astronómica (UA)** es igual a la razón entre el diámetro de la imagen (d_i) y la altura de la tarjeta (h).

$$\frac{d_s}{UA} = \frac{d_i}{h}$$

a) ¿Por qué se puede afirmar lo anterior?

b) Utilicen esta relación para calcular el diámetro del Sol. Comparen sus resultados con el de sus compañeros.

c) Justifiquen que el cálculo del diámetro solar realizado implica una situación de semejanza de triángulos.

En las actividades anteriores trabajaste con la aplicación de los criterios de semejanza de triángulos, ¿cómo podrías establecer que dos triángulos son congruentes sin tener que calcular todas sus medidas?

Analicen las preguntas, respóndanlas y realicen lo que se solicita.

1. ¿Cuál es la diferencia entre el concepto de semejanza de triángulos y congruencia de triángulos?
2. Con los criterios de semejanza de triángulos se establece cuando dos triángulos tienen la misma forma pero no necesariamente el mismo tamaño, ¿qué se necesita pedir en cada uno de los criterios para garantizar esto último?
3. ¿Es posible reformular cada uno de los criterios de semejanza para garantizar que dos triángulos son congruentes? Justifiquen su respuesta.
4. Reformulen los enunciados presentados en la primera columna para obtener los criterios de congruencia.

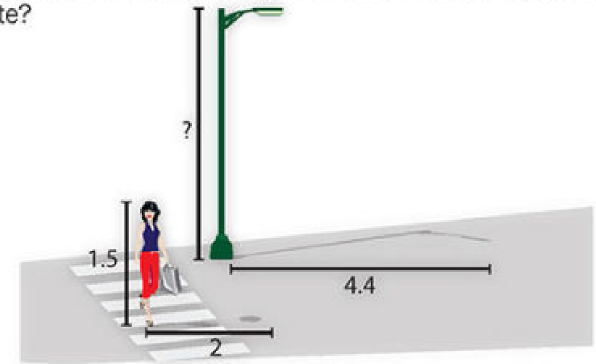
Criterios de semejanza de triángulos	Criterios de congruencia de triángulos
Criterio de semejanza LLL: Si las razones de los lados de un triángulo $A'B'C'$ con los lados correspondientes de un triángulo ABC son iguales, entonces $A'B'C'$ y ABC son triángulos semejantes.	Primer criterio de congruencia (LLL) ____ ____ ____
Si los triángulos $A'B'C'$ y ABC tienen un ángulo común y las razones entre los lados adyacentes a ese ángulo son iguales en ambos triángulos, entonces $A'B'C'$ y ABC son triángulos semejantes.	Segundo criterio de congruencia (LAL) ____ ____ ____
Si los triángulos $A'B'C'$ y ABC tienen dos ángulos iguales y el lado común a ellos es proporcional, entonces $A'B'C'$ y ABC son triángulos semejantes.	Tercer criterio de congruencia (ALA) ____ ____ ____

Expliquen por qué es importante justificar las conclusiones obtenidas usando la lógica matemática.

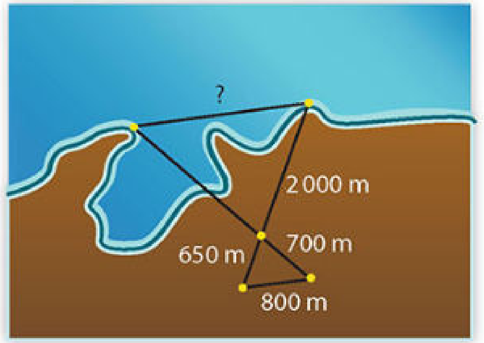
Validen sus resultados y argumentos con el resto de sus compañeros y con el profesor.

A partir de los conocimientos adquiridos, resuelve los siguientes problemas.

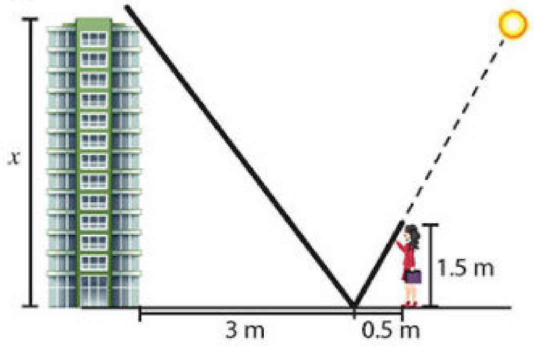
1. Una mujer que camina por la calle mide 1.50 m de estatura. En determinado momento del día su sombra mide 2 m, mientras que la sombra de un poste mide 4.40 m, ¿cuál es la altura del poste?



2. Se quiere conocer la distancia entre dos puntos de una bahía, pero no hay forma de medirla directamente, lo más que se ha podido hacer es construir un sistema de triángulos semejantes y medir algunos lados. Determina la distancia buscada con base en la información que se proporciona.



3. Luisa desea saber la altura del edificio en donde vive a partir de su propia altura, que es 1.5 m, para lo cual ha recordado su clase de física, en la que aprendió que los rayos de luz que inciden en un espejo se reflejan con un ángulo igual al de la incidencia. Entonces, Luisa puso un espejo en el suelo a 3 m del edificio y ella se colocó de tal forma que pudiera ver la parte más alta de éste reflejada en el espejo, esto es, a 0.5 m de distancia. Ayúdale a Luisa a conocer la altura del edificio.



Manejo de la información

Proporcionalidad y funciones

Análisis de representaciones (gráficas, tabulares y algebraicas) que corresponden a una misma situación. Identificación de las que corresponden a una relación de proporcionalidad

Reactivando el saber

Seguramente has notado que en los periódicos, en las revistas, en las noticias de televisión, etcétera, para presentar información que relaciona dos cantidades algunas veces se utilizan tablas de datos, diversos tipos de gráficas o incluso relaciones algebraicas. ¿Por qué crees que existen tantas formas de representar una misma situación? ¿Cuál forma de representación crees que sea más conveniente utilizar? Menciona tres situaciones en las que hayas visto aplicadas las diversas formas de representación de datos.

Observa la información y responde lo que se solicita.

En la siguiente tabla y gráfica se presenta la talla en centímetros de un niño mexicano, en relación con su edad en meses.

edad (meses)	talla (cm)	edad (meses)	talla (cm)	edad (meses)	talla (cm)	edad (meses)	talla (cm)
0	55.6	10	72.6	20	79.0	30	84.0
1	58.3	11	73.5	21	79.5	31	84.0
2	60.6	12	74.3	22	80.3	32	85.3
3	62.7	13	75.1	23	80.5	33	85.5
4	64.6	14	75.7	24	81.0	24	86.0
5	66.3	15	76.4	25	81.5	35	86.5
6	67.9	16	76.9	26	82.0	36	86.9
7	69.2	17	77.5	27	82.5		
8	70.5	18	78.0	28	83.0		
9	71.6	19	78.5	29	83.5		

a) ¿A qué edad, entre el nacimiento y los 3 años, un niño crece más rápido?

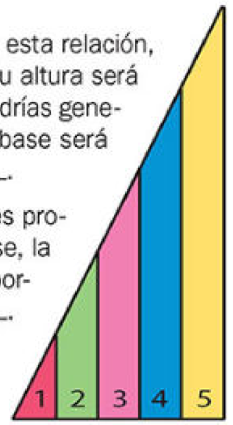
b) ¿Entre el nacimiento y los 3 meses, en qué período el niño gana estatura de manera proporcional a su edad?

c) En promedio, ¿cuánto mide un niño al nacer? ¿Cuánto mide al año?

d) ¿Cuántos meses deben transcurrir, para que un recién nacido crezca la tercera parte de lo que crecerá en 36 meses? ¿Cuántos meses pasarán para que alcance otra tercera parte? ¿Cuántos meses transcurrirán para que el niño crezca el último tercio?

Discutan con sus compañeros qué les fue más útil para responder las preguntas: la tabla o la gráfica. Justifiquen sus respuestas.

Observa la figura formada por una familia de triángulos semejantes y completa lo que se pide.



En este ejemplo, la altura de cada triángulo mide el doble de su base. Usando esta relación, completa el siguiente enunciado: si un triángulo de esa familia tiene base 4, su altura será ________; si otro triángulo tiene altura 16, su base será ________; etcétera. Podrías generalizar afirmando que si un triángulo cualquiera de la familia tiene altura x su base será ________; o en forma equivalente, que si su base es y, su altura será ________.

En este caso, ¿la relación existente entre la altura y la base de los triángulos es proporcional? Para determinar el valor de la altura, conociendo cuánto mide la base, la constante de proporcionalidad es ________, mientras que la constante de proporcionalidad que determina la medida de la base conociendo la altura es ________.

Señalen cuáles de los siguientes enunciados muestran una relación de proporcionalidad (P) entre las variables y cuáles no (NP).

1. Las distancias que recorre un auto que viaja a velocidad constante, en relación con los tiempos que tarda en hacer cada recorrido ________.
2. El peso de las personas, en relación con su estatura ________.
3. La cantidad de pintura que se requiere para pintar varios muros, en relación con su área ________.
4. Los pesos de varias bolsas que tienen canicas del mismo tamaño, dependiendo de la cantidad de canicas que hay en cada bolsa ________.
5. La estatura de las personas, dependiendo de sus edades ________.
6. La estatura, de distintas personas, dada en centímetros, cuando se convierte a pulgadas ________.
7. Los precios de varios artículos en pesos mexicanos cuando se convierten a dólares ________.

Usen la información de cada tabla para calcular una constante de proporcionalidad y completar los datos que faltan.

1. Las longitudes de varios objetos, medidos en centímetros y en pulgadas.

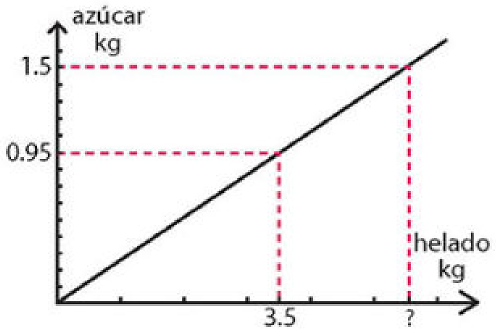
cm	0		25.4	32	45		La constante de proporcionalidad es:
plg		4	10			25	1 plg = ________ cm

2. La distancia recorrida por un vehículo que viaja a velocidad constante, en el tiempo indicado:

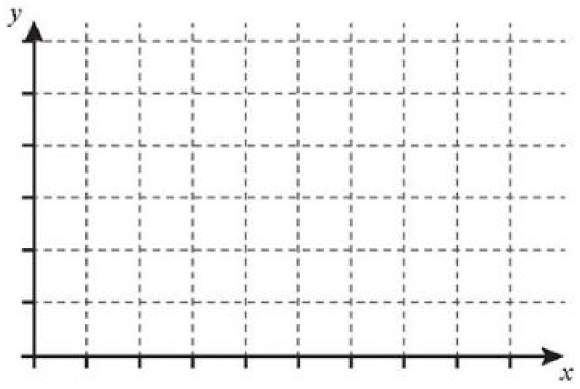
Kilómetros (km)	0		340	500	750		La constante de proporcionalidad es:
Horas (h)		2	5			15	1 h = ________ km

En los siguientes ejercicios, determinen una constante de proporcionalidad adecuada.

1. Para preparar 3.5 kg de helado se requieren 0.95 kg de azúcar, ¿cuánto helado puede prepararse con kilo y medio de azúcar?
   a) Constante de proporcionalidad
   $k =$ ________ $=$ ________,
   cantidad de helado $c = 1.5\,k =$ ________.
   b) Para calcular la cantidad de helado que se puede preparar con una cantidad conocida de azúcar, ¿qué constante de proporcionalidad usarían, $\frac{.95}{3.5}$ o $\frac{3.5}{.95}$?
   c) Si se quiere calcular la cantidad de azúcar necesaria para preparar una cantidad deseada de helado, basta multiplicar ésta por una constante de proporcionalidad. En este caso ¿cuál de las dos constantes debe usarse?



2. Un jardinero poda un césped de 120 m² en 20 minutos.
   a) ¿Cuánto tardará en podar un césped de 420 m²? ________ ¿Cuál es la constante de proporcionalidad? ________.
   b) Tracen la gráfica que relaciona las dos variables.
   c) Usen la gráfica para conocer aproximadamente el área de césped que podría podar en media hora el mismo jardinero.

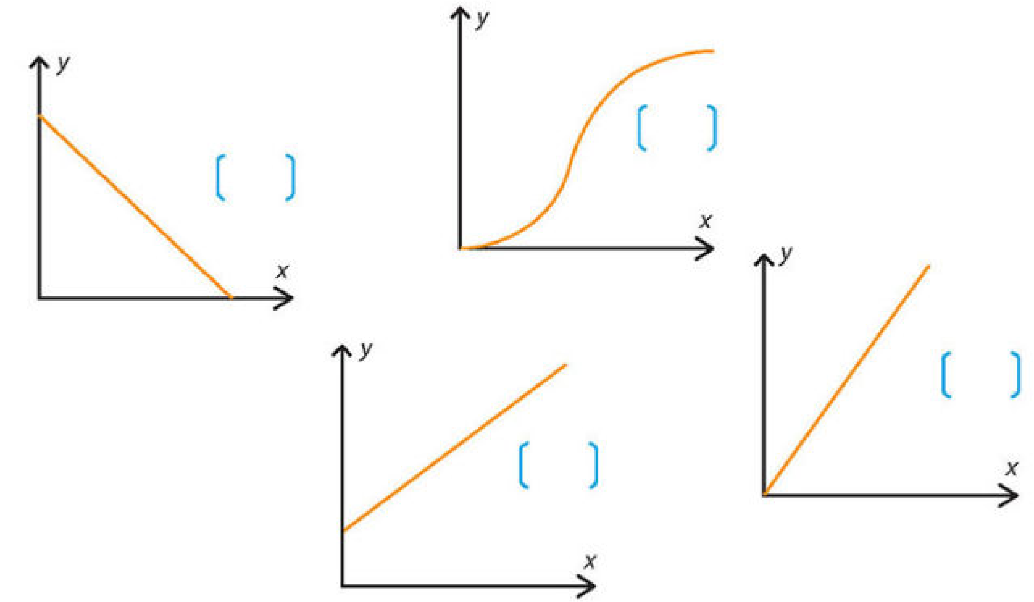


3. Si 200 g de arroz proporcionan alimento para 4 personas, la constante $\frac{200}{4} = 50$ es un factor de ampliación que sirve para calcular, por ejemplo, cuánto arroz se necesita para alimentar a 25 personas. Recíprocamente, el factor $\frac{200}{4} = .02$ es un factor de reducción que sirve, por ejemplo, para saber cuántas personas pueden alimentarse con 2 300 g de arroz.

   a) ¿Cuánto arroz se necesita para alimentar a 32 personas?

   b) ¿Cuántas personas pueden alimentarse con 750 g de arroz?

4. Sólo una de las siguientes gráficas corresponde a una familia de triángulos semejantes y por lo tanto a una relación proporcional. Identifiquen con una (P) la que consideren correcta:



5. Califiquen como falsa (F) o verdadera (V) cada una de las siguientes afirmaciones.

   a) La gráfica de una relación proporcional es cualquier curva que pasa por el origen. ( )

   b) La gráfica de una relación proporcional debe ser recta, aunque no pase por el origen. ( )

   c) La gráfica de una relación proporcional debe ser recta, y debe pasar por el origen. ( )

6. Completen los siguientes enunciados.

   a) Si dos variables se relacionan proporcionalmente, cuando una de ellas tiene valor cero, la otra ____________ y si una de ellas crece o disminuye multiplicada por una constante, la otra también ____________ o ____________ multiplicada por ____________.

   b) Lo anterior significa que la gráfica de dos variables que se relacionan proporcionalmente es una ____________ que necesariamente pasa por ____________.

   c) Si x y y son dos variables con relación proporcional, y x_0, y_0 son dos valores particulares conocidos, la constante $\frac{y_0}{x_0}$ sirve para calcular el valor de ____________ conociendo el de ____________ y viceversa, si se conoce el valor de y_0 y quiere calcularse el valor de x_0, puede usarse la constante ____________.

Calculen los ingredientes necesarios para preparar 250 sandwiches de jamón, sabiendo que en una ocasión, se utilizaron las siguientes cantidades para preparar 7.

a) ¿Cuáles son las cantidades necesarias de cada ingrediente? ____________

b) ¿Cuántas constantes diferentes usaron para resolver el problema? ____________

c) ¿Cuántas y cuáles de ellas fueron factores de ampliación? Expliquen sus respuestas.

d) ¿Cuántas y cuáles fueron factores de reducción? Justifiquen su respuesta.

e) ¿Cuántas y cuáles no fueron ni de reducción ni de ampliación? Argumenten su respuesta.

f) ¿Cuánto de cada ingrediente se necesita para preparar cero sandwiches? ____________

g) Si duplicas la cantidad de sandwiches, ¿se duplica la cantidad de todos los ingredientes?, ¿qué sucede si la triplicas?

No lo olvides, cuando dos cantidades se relacionan proporcionalmente:

- Si una de ellas es cero, la otra también.
- Si una de ellas se duplica, la otra también.

Función lineal

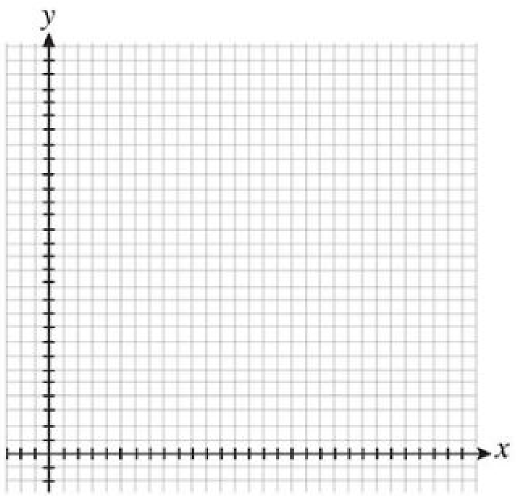
Es bastante común ver en las taquerías tablas como la que completarás a continuación.

"Taquería Don Manuel"

Cantidad	Precio	Cantidad	Precio	Cantidad	Precio
2	$26	6		10	$130
3		7		11	
4		8		12	
5	$65	9		13	$169

Basándote en los datos de la tabla responde las siguientes preguntas.

1. ¿Cuál es la relación que se establece entre los datos de la tabla?
2. ¿Cuál es el precio de cada taco?
3. Utiliza tu resultado para saber cuánto costarían 17 tacos.
4. Establece una relación algebraica, de la forma $t = px$, en donde t es el total a pagar y x es la cantidad de tacos de un pedido. ¿Cuál es el valor de la constante p, y cuál es su significado?
5. Traza la gráfica de la función lineal $t = px$, para valores de x entre 5 y 15. Luego, extiende hacia ambos lados la gráfica.
6. Observa tu gráfica y responde lo siguiente:
   a) ¿Pasa por el origen?
   b) ¿Qué total a pagar corresponde a 21 tacos?
   c) ¿Cuántos tacos pueden comprarse con $ 60?
   d) ¿Cómo cambiaría la gráfica si el precio por taco aumentara a $ 15? ¿Dejaría de pasar por el origen? ¿Crecería más rápido o más lento?



Explora

Para que pongas en práctica algunos conceptos relacionados con la función lineal y el crecimiento proporcional, accede al siguiente sitio electrónico y realiza las actividades que ahí se incluyen.

http://www.extremate.es/ESO/Definitivo%20Funciones/textolineal.swf

(Consulta: 18 de agosto de 2014).

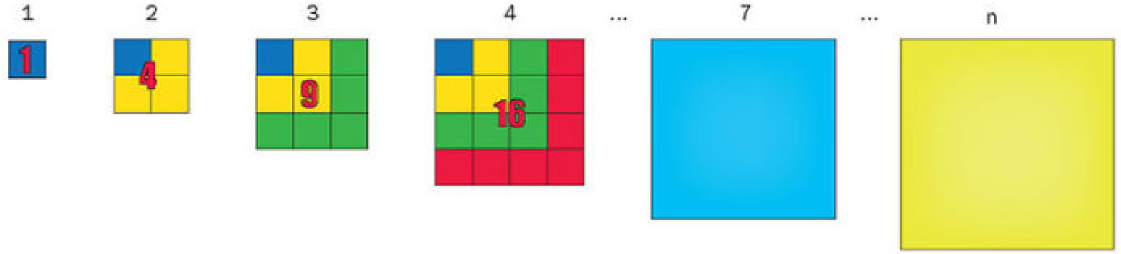
Representación tabular y algebraica de relaciones de variación cuadrática, identificadas en diferentes situaciones y fenómenos de la física, la biología, la economía y otras disciplinas

Reactivando el saber

¿Cuántas veces te has encontrado en situaciones donde el cálculo de superficies es necesario? Seguramente, tus familiares y tú en alguna ocasión se han preguntado cuál es la superficie de la pared que desean pintar, cuánto material hay que comprar para remodelar el piso de una habitación, o qué dimensiones debe tener un terreno para ocupar la mayor superficie en casa habitación. ¿Recuerdas qué cálculos han realizado para resolver este tipo de preguntas?

Realicen las siguientes actividades.

1. Observen la secuencia que se incluye a continuación y respondan las preguntas.



Denotando con l_1, l_2, l_3, ... las longitudes de los lados y con a_1, a_2, a_3, ... las áreas de los cuadrados.

a) ¿Se relacionan las variables l y a en forma proporcional? ¿Por qué?

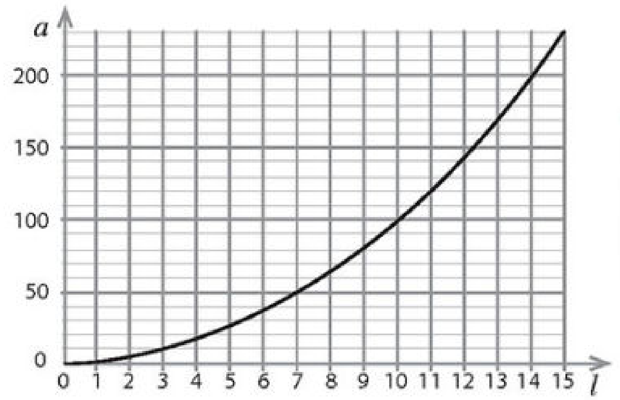
b) ¿Qué valor toma a cuando $l = 7$?

c) ¿Cuál será el área de un cuadrado de lado $l = 9$?

d) ¿Cuánto vale a cuando $l = n$?

e) ¿Qué le ocurre al área cuando el lado se duplica? ¿Y cuando el lado se triplica?

2. Observen la gráfica correspondiente al problema de los cuadrados y completen la tabla.
3. Observen la gráfica y la tabla del ejercicio anterior para responder las preguntas.



l	1	2	3	4			
l^2			9		25	100	225
a		4	9				

a) ¿Se relacionan las variables l y a en forma proporcional? ¿Por qué?

b) ¿Se relacionan las variables l^2 y a en forma proporcional? Justifiquen su respuesta.

c) ¿Cuál es la constante de proporcionalidad?

4. Para pintar una mampara cuadrada, de lado l expresado en metros, se necesitan distintas cantidades c de pintura, expresadas en mililitros. Analicen y completen la tabla correspondiente a este problema.

l (m)	1	2	3	4			15
l^2 (m^2)			9		25		
c (ml)		800	1800			20000	

a) ¿Se relacionan las variables l^2 y c en forma proporcional?

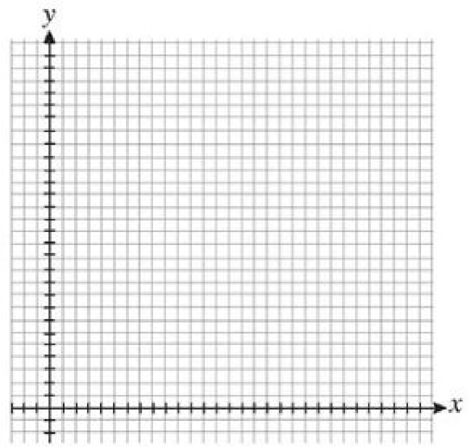
b) ¿Cuál es la constante de proporcionalidad?

c) ¿Qué cantidad de pintura se necesita por metro cuadrado?

d) Escriban una fórmula para calcular c, conociendo l.

e) Tracen la gráfica correspondiente a los valores entre 0 y 10 metros del lado del cuadrado. Coloquen c en el eje de las ordenadas y l en el eje de las abscisas.

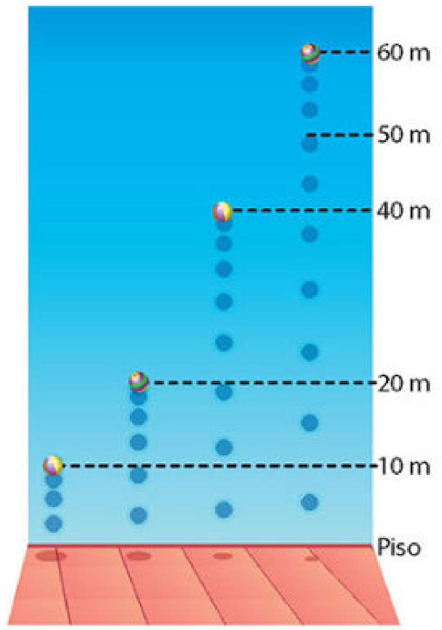
f) ¿Cuánta pintura se necesita para pintar una mampara rectangular de 4 m × 10 m?



5. En un experimento, se deja caer una pelota desde distintas alturas h (medidas en metros) y se registran los tiempos t (medidos en segundos) que tarda en llegar al piso.

Los resultados que se obtuvieron están reportados en la siguiente tabla y las posiciones que tenía la pelota en el aire se muestran en la figura, a intervalos de 0.35 segundos aproximadamente.

h (m)	10	20	50	60
t (s)	1.414	2.000	2.828	3.464
h^2		400		
t^2	2			



a) Completen la tabla, calculando los cuadrados de ambas variables y redondeando a cifras enteras.

b) Grafiquen cada uno de los puntos (t,h) de la tabla y conéctenlos con una curva suave.

Observen la tabla, la gráfica y la figura de la actividad anterior y respondan las preguntas.

a) Al observar la imagen de las pelotas cayendo, ¿cómo se hace evidente que la altura no es proporcional al tiempo?

b) ¿Es t proporcional a h^2? Si es el caso, encuentren la constante de proporcionalidad.

c) ¿Es h proporcional a t^2? Si es el caso, encuentren la constante de proporcionalidad.

d) Usen la constante de proporcionalidad que encontraron para deducir una fórmula que les permita calcular la altura (en metros) a partir del tiempo (en segundos).

e) La fórmula de caída libre de los cuerpos sobre la superficie terrestre establece que $h = \frac{1}{2}gt^2$, en donde g es la aceleración de la gravedad. Calculen el valor de g que se usó para generar los datos de la tabla.

f) Deduzcan la fórmula inversa, es decir, la que permite calcular el tiempo que se tarda en llegar al piso un objeto que se deja caer desde una altura determinada.

Reúnete con un compañero para que realicen las siguientes actividades.

a) Calculen los tiempos que tardarían en llegar al piso lunar objetos que se tiran desde las alturas que se establecen en la tabla. Tomen como base la aceleración de la gravedad lunar indicada.

En la Luna, $g = 1.6$ m/s^2				
h (m)	10	20	50	60
t (s)				

b) ¿Cuánto tiempo tardaría en llegar al piso lunar un objeto que se deja caer desde una altura de 12.8 m?

c) ¿Desde qué altura debe soltarse un objeto para que tarde 10 s en llegar al piso lunar?

d) Observen que aun cuando la Luna es más pequeña que la Tierra y la aceleración de la gravedad lunar es más pequeña que la aceleración de la gravedad terrestre, la relación entre alturas y tiempos es del mismo tipo, es decir, cuadrática en ambos casos. ¿Cuál es la constante de proporcionalidad entre h y t^2 en cada escenario?

Resuelve el siguiente problema.

Un obrero pintó varias lozas cuadradas, de diferentes dimensiones, aplicando en cada loza la misma cantidad de manos de pintura. Los costos en pesos de la pintura utilizada en las placas, dependiendo de la medida del lado de cada una en metros, se muestran en la tabla.

Longitud de lado	12	15	18	25	32
Costo ($)	$864	$1350	$1944	$3750	$6144

a) Determina el costo de pintar un metro cuadrado.

b) ¿Cuánto costaría pintar una loza cuadrada de 22 m de lado?

c) Establece una fórmula, para calcular el costo C que implica pintar una superficie cuadrada de lado l.

d) Si se gastaron $4374 en pintura para cubrir una loza cuadrada, ¿qué dimensiones tenía la loza?

Argumenten y validen sus respuestas.

En la segunda columna de la siguiente tabla se muestran algunos valores obtenidos a partir de la función cuadrática $y = 7x^2$.

x	$y = 7x^2$	d_1	d_1
2	28		
4	112	42	
7	343	77	7
8	448	105	7
12	1008		
15	1575		
16	1792		

Analiza los datos presentados en la tabla y deduce un procedimiento para calcular los valores de la tercera y cuarta columnas.

Comparen sus procedimientos y justifiquen la validez de ellos.

Seguramente observaste que los valores de la tercera columna se calcularon del siguiente modo:

$$42 = \frac{112 - 28}{4 - 2}, \qquad 77 = \frac{343 - 112}{7 - 4},$$

$$105 = \frac{448 - 343}{8 - 7},$$

mientras que los valores de la cuarta columna se obtuvieron al realizar las operaciones:

$$7 = \frac{77 - 42}{7 - 2}, \qquad 7 = \frac{105 - 77}{8 - 4},$$

A partir del procedimiento planteado, realicen lo que se solicita.

a) Calculen los valores que faltan en la tabla y escríbanlos en las celdas correspondientes.

b) ¿Tienen alguna relación los valores de la cuarta columna, con la función cuadrática?

c) Las variables x y y no se relacionan en forma proporcional, pero x y d_1 sí son proporcionales. Para demostrarlo, calculen la constante de proporcionalidad entre éstas.

Intercambien con el resto del grupo y con el profesor sus resultados y argumentos. Validen sus respuestas.

A partir de lo aprendido, realiza la siguiente actividad.

Los valores de la siguiente tabla corresponden a una función cuadrática de la forma $y = kx^2$, en donde la constante k no es evidente.

x	1.5	2.1	3.5	4.2	5.3	6.5	8.1	9	9.8
$y = kx^2$	11.25	22.05	61.25	88.2	140.45	211.25			
d_1									
d_2									

a) Calcula los valores de d_1 y d_2.

b) ¿Cuál es el valor de la constante k?

c) Usa el valor que encontraste para calcular los valores de y que faltan en la tabla.

Analicen y resuelvan el siguiente problema.

A esferas de distintos radios se les aplicó un recubrimiento especial, cuyo precio unitario es de p pesos por centímetro cuadrado. El costo del material C aplicado de acuerdo a la longitud del radio de la esfera se registró en la siguiente tabla. Determinen el precio unitario de un recubrimiento industrial.

r (cm)	3	5	7	8	9	12	13
C (pesos)	508.94	1 413.72	2 770.89	3 619.12	4 580.45	8 143.03	9 556.75
d_1							
d_2							

a) Investiguen la fórmula para calcular la superficie S de una esfera de radio r.
$S =$ ________

b) Si el material se vende a razón de p pesos por centímetro cuadrado, escriban la fórmula que permite calcular el costo total del material cuando se aplica sobre una esfera de radio r. $C =$ ____________________

c) Completen la tabla, calculando las diferencias d_1 y d_2.

d) Determinen el valor de la constante k de la relación cuadrática $C = kr^2$.

e) Calculen el precio unitario del material aplicado. Expliquen el método que utilizaron.

f) ¿Cuánto costaría aplicar el mismo recubrimiento a una esfera cuyo radio mide 17 cm?

Con el apoyo de su profesor validen sus procedimientos y resultados.

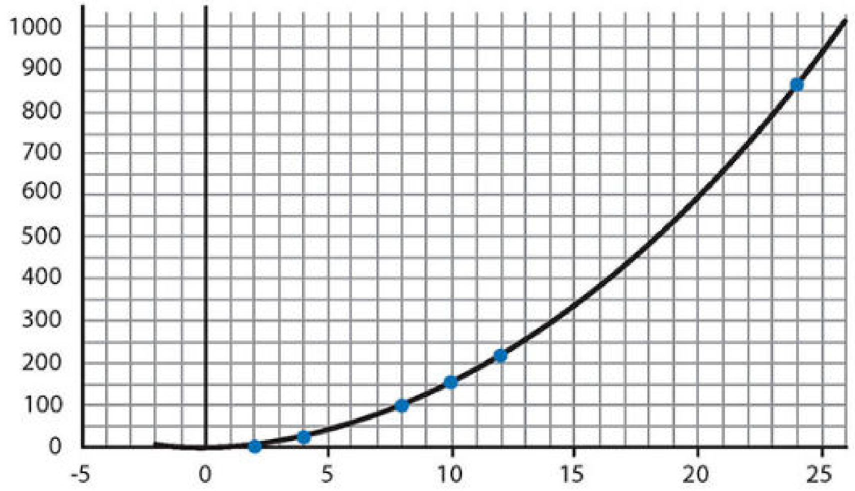
A las variables d_1 y d_2 se les llama diferencias divididas; d_1 son las primeras diferencias divididas y d_2 las segundas diferencias divididas.

Realicen las siguientes actividades.

1. A partir de los datos que se proporcionan en la siguiente tabla, determinen el valor de la constante k que corresponde a la relación $y = kx^2$.

x	−2	2	4	8	10	12	18	24	26
y		6	24	96	150	216		864	
d_1									
d_2									

2. Una vez que determinaron el valor de la constante k, calculen los valores faltantes de y.



3. Observen la gráfica correspondiente a los puntos (x,y) de la tabla anterior y grafiquen los puntos faltantes.

a) ¿Observar la gráfica de una colección de puntos, permite saber si la relación entre las variables es proporcional o es cuadrática? Justifiquen su respuesta.

b) ¿Qué elementos o características de la gráfica podrían indicarles si la relación es proporcional?

c) ¿Cómo identificarían si la relación es cuadrática?

d) Al calcular diferencias divididas, ¿qué aspectos indican que dos variables se relacionan cuadráticamente?, ¿qué aspectos indican que la relación es de tipo proporcional?

Validen sus respuestas con el apoyo del profesor.

Realiza lo que se solicita para cada una de las tablas.

1. Determina si la relación presentada en la tabla es de tipo proporcional o cuadrática.
2. Calcula el valor de la constante k que permite expresar el valor de y mediante alguna de las expresiones $y = kx$ o $y = kx^2$.
3. Usa en cada caso la expresión que generaste para calcular los valores faltantes.

a) Relación 1

x	12	15	16	17	32	55	61
y	36	45		51	96	165	

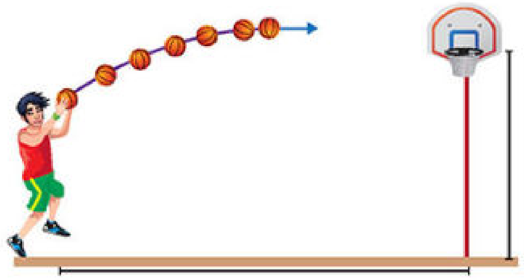
b) Relación 2

x	2	3	4	6	7	8	10
y	10	22.5	40	90		160	

c) Relación 3

x	1	2	5	6	15	21	25
y	−3		−75	−108	−675	−1323	

Intercambien sus ideas y conclusiones para completar los enunciados.



1. Es posible reconocer que la relación entre dos variables es cuadrática si al graficarlas se obtiene parte de una curva llamada ____________________, semejante a la trayectoria que describe un proyectil sujeto a la fuerza de gravedad.
2. Una vez que se ha identificado que la relación es cuadrática, de la forma $y = kx^2$, el problema se reduce a determinar el valor de la constante k, lo que significa que las variables ______ y ______ se relacionan proporcionalmente. Al comparar los valores de las variables se puede obtener el valor de la constante, de igual forma que en los problemas de proporcionalidad.
3. Otra forma de identificar que la relación entre dos variables es lineal o cuadrática, es calculando las primeras y segundas diferencias divididas, entonces la constante k es la ____________________ dividida cuyo valor es el mismo en toda la tabla. Si ninguna de las diferencias divididas queda constante, entonces la relación entre las variables no es ____________________ ni ____________________.

Con el apoyo de su profesor validen sus argumentos y resultados.

Nociones de probabilidad

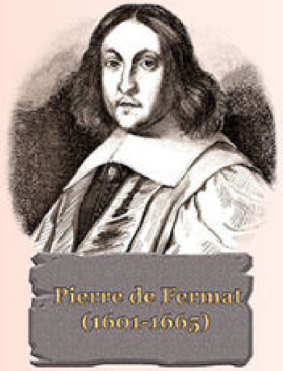
Conocimiento de la escala de la probabilidad.
Análisis de las características de eventos complementarios y eventos mutuamente excluyentes e independientes

Reactivando el saber

Seguramente alguna vez has jugado al volado.

- Antes de tirar la moneda ¿es posible saber lo que va a salir?
- ¿Es posible tener una estrategia que te permita ganar *siempre*?
- ¿Podrías seguir alguna estrategia que te brinde *mayor probabilidad* de ganar?, ¿cuál?
- Para ti, ¿qué es la probabilidad?

Matemáticas en el pasado



Hace unos cuatrocientos años, Antoine Gombaud (también conocido como *El caballero de Mèré*), experto jugador de la corte francesa y aficionado a las matemáticas, sugirió a Blaise Pascal el problema de la división de la apuesta, preguntándose: "En un juego de azar, en el que deben ganarse cinco partidas para ganar la apuesta, si el juego se interrumpe cuando uno de los jugadores ha ganado tres y el otro ha ganado cuatro, ¿cómo debe repartirse la apuesta?". Este planteamiento derivado del ocio, sirvió de pretexto para una serie de cartas entre Pascal y Pierre de Fermat, ambos matemáticos profesionales. De esta discusión surgió el estudio formal de la probabilidad, que hoy en día es sumamente útil en muchos campos del conocimiento, pues estudia precisamente aquellos fenómenos en los que no puede saberse a ciencia cierta qué es lo que ocurrirá.

Fuente: Pérez, Máximo, 2013.

Ahora que conoces la anécdota de las cartas entre Pascal y Fermat, ¿qué entiendes por probabilidad?

El juego del siete

Lean las instrucciones del juego de dados llamado el juego del siete y respondan las preguntas.

Objetivo: Adivinar el resultado que se obtendrá en una tirada de 2 dados.

Número de jugadores: Tres (uno de los integrantes del equipo será el banco)

Material:

- Una tabla como la que se muestra a continuación, dividida en tres secciones
- Dos dados.
- Una bolsa con 100 frijolitos que, aproximadamente, posee el banco.

Instrucciones:

1. El banco reparte a cada jugador 5 frijolitos.
2. Cada jugador debe adivinar si la suma de 2 dados estará entre 2 y 6 (bajos) o entre 8 y 12 (altos). Colocará uno de sus frijolitos en alguna de las casillas. La casilla *Siete* está prohibida para los jugadores.
3. El jugador que representa al banco tira los dados. Los jugadores que hayan atinado al resultado recuperarán su frijolito y recibirán uno extra como ganancia. El banco se quedará con los frijolitos de aquellos que no atinaron. Siempre que salga 7, el banco se queda con todo.
4. El juego termina cuando alguno de los jugadores llegue a 10 frijolitos o cuando alguien los pierda todos.
   a) Antes de realizar el juego respondan ¿qué creen que sea más probable obtener bajos, altos o siete?
   b) Durante el juego, registren los resultados que se obtienen en cada vuelta utilizando una tabla como la siguiente; para ello, coloquen una rayita (tarja) cada vez que se obtenga un resultado.

Bajos	Siete	Altos

A partir de su experiencia en el juego anterior realicen lo que se solicita para conocer la probabilidad de cada evento.

1. La probabilidad empírica (también llamada frecuencial o experimental) se obtiene dividiendo la cantidad de veces que ocurrió un evento entre el número total de veces que se tiraron los dados. Completen la siguiente tabla con los resultados experimentales del juego.

Eventos	Número de veces que ocurrió	Probabilidad
Bajos		
Siete		
Altos		

2. Otra manera de medir la probabilidad de un evento es analizando los posibles resultados sin realizar el experimento. A esto se le llama probabilidad teórica. Completa la siguiente tabla escribiendo en los recuadros la suma de los dados, tal como se hace en los ejemplos.

		Posibles resultados en el primer dado					
		1	2	3	4	5	6
Posibles resultados en el segundo dado	1						
	2		4				
	3						
	4						
	5				9		
	6						

3. Utilicen los resultados anteriores para completar la siguiente tabla. Recuerden que la frecuencia relativa se obtiene dividiendo las frecuencias absolutas entre el total de posibles combinaciones.

Suma de los dados	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa
2		
3		
4		
5		
6		
7		
8		
9		
10		
11		
12		

a) ¿Cuál es la probabilidad de los eventos: bajos, altos y siete?

b) Comparen sus resultados con los obtenidos de manera empírica.

c) Comparen sus resultados de probabilidad empírica y teórica con lo que pensaban que era más probable antes de realizar el juego.

d) ¿Creen que el juego es justo para todos los jugadores? ¿Por qué?

e) ¿Qué creen que ocurrirá con la cantidad de frijolitos de los jugadores después de jugar muchas veces?, ¿qué sucederá con los frijolitos del banco después de múltiples partidas?

Recuerda que al dividir los eventos favorables entre los eventos posibles obtendrás un número positivo entre 0 y 1. De este modo, la probabilidad de ocurrencia de un evento cualquiera puede compararse con la probabilidad de cualquier otro, pues los límites 0 y 1 son la escala de la probabilidad.

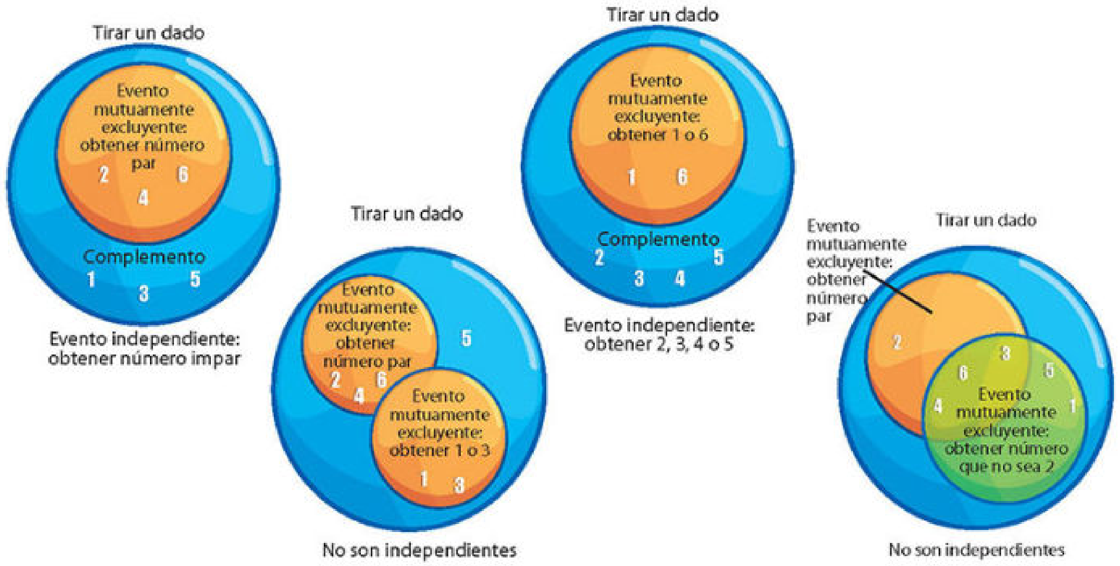
El lenguaje de la probabilidad

En este momento es importante poner en claro algunos conceptos clave relativos a la probabilidad. Para ello, pensaremos en el ejemplo de tirar un dado.

Evento simple. Se trata de un posible resultado de un experimento aleatorio. Un evento simple en el ejemplo es obtener 3.

Evento mutuamente excluyente. Se trata de un evento que resulta de agrupar eventos simples y se verifica cuando ocurre cualquiera de los eventos simples que lo forman. Un evento mutuamente excluyente posible en el ejemplo de lanzar un dado es "obtener 1 o 6".

Eventos independientes. Dado un evento mutuamente excluyente cualquiera, su evento independiente es otro evento mutuamente excluyente formado exactamente por todos aquellos eventos simples que no pertenecen a él. En el ejemplo de tirar un dado, el evento independiente de "obtener números pares" es "obtener números impares".



Contesta las siguientes preguntas.

1. ¿Cuántos eventos simples existen al lanzar un volado con una moneda?
2. Menciona tres eventos simples posibles al lanzar un dado.
3. Menciona dos eventos compuestos al lanzar un dado.
4. Describe el evento complementario a los eventos que se muestran a continuación.
   a) Obtener 1 o 3 al lanzar un dado.
   b) Obtener un número mayor a 4 al lanzar un dado.
5. Piensa en el juego del 7. Los eventos bajos y altos ¿son complementarios?, ¿por qué?

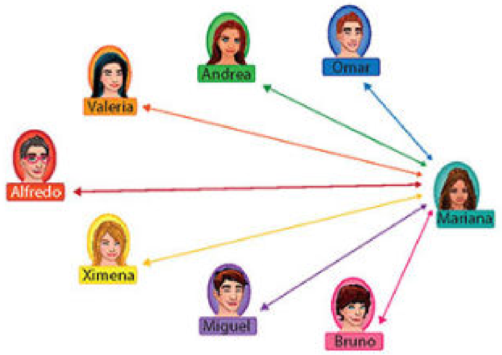
Validen sus respuestas con la guía del profesor.

El intercambio de regalos

Mariana y sus amigos organizaron un intercambio de regalos. Para decidir cómo intercambiarlos escribieron sus nombres en papelitos, y decidieron elegirlos de manera abierta con el siguiente método: una persona saca un papelito y hace pareja con la persona cuyo nombre esté escrito, entonces los dos papelitos se eliminan de la urna.

A Mariana le gustaría que le saliera Bruno o Alfredo, porque los dos son muy simpáticos y ella sabe lo que le gusta a cada uno; en definitiva no le gustaría que le saliera Omar porque no se llevan nada bien; de los demás, preferiría que no le salieran, aunque en caso de que no le saliera alguno de sus favoritos estaría contenta de regalarle a Andrea que es su mejor amiga o a Miguel que en realidad no le cae tan mal.

Mariana hizo un dibujo como el de abajo para indicar sus posibilidades.



Andrea vio el dibujo y le preguntó a Mariana: ¿Cuántas parejas diferentes podemos formar?

Realiza las siguientes actividades.

1. Completa la gráfica de Mariana asegurándote de que cada posible pareja esté representada por una línea con flechas.

2. Cada una de estas posibles parejas es un evento simple. ¿Cuántas parejas diferentes se pueden formar? Escríbelas todas en la siguiente tabla:

En su libreta, Mariana escribió:

Los que quiero que me salgan	Los que no quiero que me salgan	Los que ya no me pueden salir
	Omar	
	Ximena	
Bruno	Valeria	
Alfredo	Mariana	
	Andrea	
	Miguel	

—Yo primero —dijo Valeria, y se acercó a la urna.

—Como hay ocho papelitos, la probabilidad de que saque a Bruno o a Alfredo es de $\frac{2}{8}$ —Mariana le dijo a Andrea en voz muy bajita.

—O sea $\frac{1}{4}$ amiga, no me preocuparía mucho.

Valeria sacó el papelito que decía Ximena.

—Hay que sacar también el papelito de Valeria porque ya tiene pareja —dijo Andrea.

Actualiza la tabla de Mariana a partir de los datos anteriores.

Los que quiero que me salgan	Los que no quiero que me salgan	Los que ya no me pueden salir
	Omar	
	Ximena	
Bruno	Valeria	
Alfredo	Mariana	
	Andrea	
	Miguel	

a) Explica el procedimiento que seguiste.

Se les llama eventos excluyentes a aquellos que no pueden ocurrir simultáneamente. Por ejemplo, si ya ha salido la pareja Ximena-Valeria, ya no pueden salir las parejas Mariana-Ximena o Mariana-Valeria.

Se llaman eventos independientes a aquellos en los que la aparición de uno no afecta la probabilidad de otro. Si se tira un dado azul y sale 6, la probabilidad de sacar 5 en un dado rojo sigue siendo $\frac{1}{6}$ y no se ve alterada por el resultado del dado azul.

A partir de lo aprendido, resuelvan el problema.

Si en una urna se tiene una bola blanca y una roja, y se saca la blanca, ¿la probabilidad de sacar la roja se ve afectada? Justifiquen su respuesta. ¿Estos eventos pueden considerarse independientes?, ¿por qué?

Lee la continuación del intercambio de regalos y completa la información que se solicita.

—Ahora le toca a Alfredo —dijo Valeria, organizando como siempre.

—Quedan 6 papelitos, la probabilidad de que Alfredo no saque el papel con tu nombre es alta —Andrea le dijo a Mariana. Alfredo sacó el papelito y ¡le salió Andrea!

Mariana no había calculado para nada esa posibilidad y Andrea… bueno, Andrea mucho menos.

—Ni modo—dijo Mariana en voz bajita—, hay que cambiar el apunte otra vez —y sonrió para que Andrea supiera que no había ningún problema.

Los que quiero que me salgan	Los que no quiero que me salgan	Los que ya no me pueden salir
	Omar	
	~~Ximena~~	Ximena
Bruno	~~Valeria~~	Valeria
~~Alfredo~~	Mariana	Alfredo
	~~Andrea~~	Andrea
	Miguel	

a) ¿Qué parejas fueron excluidas al salir Alfredo-Andrea?

____

b) ¿Cuál es ahora la probabilidad de que Mariana saque el papelito que dice: Bruno? ________

c) ¿Cuál es la probabilidad de que Mariana no saque el papelito que dice: Omar? ________

Los que quiero que me salgan	Los que no quiero que me salgan	Los que ya no me pueden salir
	~~Omar~~	
	~~Ximena~~	Ximena
Bruno	~~Valeria~~	Valeria
~~Alfredo~~	~~Mariana~~	Alfredo
	~~Andrea~~	Andrea
	Miguel	

—Tu turno —dijo Valeria mirando a Mariana.

Mariana cerró los ojos y tomó el papelito… ¡Oh!, funesto destino, —¡Omar! ¿Por qué Omar, si había una alta probabilidad de que no saliera él? (Si hubiera un millón de papelitos en la urna y entre ellos uno solo de Omar, seguramente le tocaría a ella).

Andrea tachó los nombres en la libreta de su amiga.

—Bueno, a Miguel le toca con Bruno —dijo Valeria.

Espera —respondió Andrea— Miguel tiene todavía que sacar un papelito y existe una probabilidad de que se saque a sí mismo, de modo que tendríamos que hacer todo otra vez.

A partir de aquí, vino una discusión, algunos decían que eso no era práctico y que ya estaba decidido, otros más recordaron las reglas del juego.

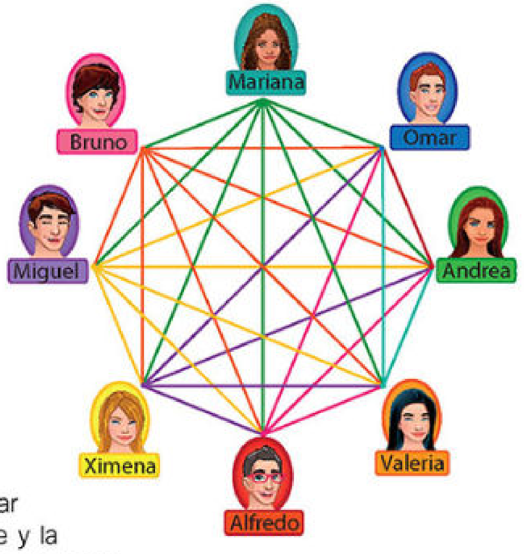
d) ¿Cuál es ahora la probabilidad de que Miguel saque su propio nombre? ____________

e) A final de cuentas, el sorteo no se repitió y todos tuvieron claro que el resultado había sido justo. ¿Cómo se resolvió el problema? ____________________________

____

Y respecto al intercambio, ese día Mariana le dio a Omar un suéter, pero Omar le regaló un retrato de ella que hizo a lápiz y desde entonces le cayó mejor, de hecho descubrió que aparte de talentoso, se veía bien con el suéter.

Mariana entendió que por muy poco probables que fueran las cosas, si había una pequeñita posibilidad de que algo ocurriera no había que descartarla. —¡Nunca se sabe amiga! —le dijo a Andrea.



El espacio muestral

En el problema de calcular las probabilidades de distintas parejas para Mariana, es conveniente identificar la cantidad diferente de parejas que pueden formarse y la probabilidad de que cada una de ellas ocurra. En el caso que estamos estudiando, la cantidad total de parejas puede representarse y calcularse con una gráfica.

En esta gráfica, cada posible pareja está indicada con una línea. Dos personas unidas representan una posible pareja; es decir, un elemento del espacio muestral. Así, Mariana-Valeria es un elemento del espacio muestral.

Responde las siguientes preguntas.

a) ¿La pareja Mariana-Mariana es un elemento del espacio muestral de parejas? Justifica tu respuesta.

b) Haz una lista que contenga todos los elementos del espacio muestral de parejas. ¿Cuántos elementos tiene este espacio muestral?

c) ¿Cómo puedes calcular fácilmente cuántas posibles parejas hay?

d) ¿Cuál es el espacio muestral en el problema del juego del siete?

Calculen la probabilidad que se solicite en cada caso.

1. Recuerden que no está permitido que alguien saque su propio nombre. ¿Cuál es la probabilidad de que Mariana sea su propia pareja? ____________

2. Si quisiéramos saber la probabilidad de que Mariana hiciera pareja con Bruno, Alfredo, Andrea o Miguel, debemos saber que 4 de los papelitos son favorables a Mariana y 3 no lo son, de modo que la probabilidad es $\frac{7}{4}$.

a) ¿Qué probabilidad había inicialmente de que a Mariana le tocara intercambiar con un niño?, ¿y qué probabilidad con una niña?

b) ¿Qué probabilidad había inicialmente de que Mariana intercambiara con Andrea?

c) ¿Qué probabilidad había inicialmente de que a Mariana le tocara intercambiar con Bruno o con Alfredo?

El espacio muestral de un experimento es el conjunto de todos los posibles eventos que pueden resultar. En el juego del siete, los eventos simples son los posibles resultados de sumar dos dados; los eventos compuestos son "bajos", "altos" o "siete".

La probabilidad de un evento se puede conocer de varias maneras, pero siempre debe ser un número comprendido entre 0 y 1. La probabilidad de un evento imposible será 0 y la probabilidad de un evento seguro será 1. La suma de las probabilidades de todos los eventos debe ser siempre 1.

Los enfoques más comunes con los que se analiza en probabilidad son:

Probabilidad teórica

Se estudia el espacio muestral para determinar los casos posibles y se calculan las probabilidades de los eventos mediante la división de los casos favorables entre los casos posibles, es decir:

$$P(E) = \frac{n}{m}$$

en donde $P(E)$ representa la probabilidad de un evento, n es la cantidad de casos favorables y m es la cantidad de casos posibles.

Probabilidad empírica

Es una aproximación a la probabilidad teórica, determinada por los resultados obtenidos en un experimento. Se calculan las frecuencias relativas de cada uno de los eventos. Resulta de gran utilidad cuando no se tiene acceso al espacio muestral.

Analiza el experimento de tirar tres monedas.

Recuerda que los eventos simples como ASA (águila en la primera moneda, sol en la segunda y águila en la tercera) se agrupan en eventos compuestos que los contienen, tales como "obtener dos águilas y un sol".

1. Para cada evento compuesto de la siguiente tabla identifica:
   a) Los eventos simples que lo forman
   b) La probabilidad de que ocurra
   c) Los eventos complementarios

Evento	Eventos simples	Probabilidad	Evento complementario
Tres águilas			
Dos águilas y un sol	AAS, ASA, SAA		Que salga un águila y dos soles (ASS, SAS, SSA), o bien, todas las caras iguales (AAA, SSS)
Un águila y dos soles			
Tres soles			

2. Une con una línea roja los eventos compuestos que resulten mutuamente excluyentes y con una línea azul los que sean complementarios.

Que haya exactamente dos águilas.

Que haya exactamente dos soles.

Que las tres caras obtenidas sean iguales.

Que dos caras sean iguales y una diferente.

Para saber más sobre otros ejemplos de problemas de eventos mutuamente excluyentes, consulten en su Biblioteca de Aula o Escolar: "Juego sucio" en *Una ventana a la incertidumbre* de Carlos Bosch y Claudia Gómez, 2003; y *Esa condenada mala suerte* de Kjartan Poskitt, 2001.

Análisis y representación de datos

Diseño de una encuesta o un experimento e identificación de la población en estudio. Discusión sobre las formas de elegir el muestreo. Obtención de datos de una muestra y búsqueda de herramientas convenientes para su presentación

Reactivando el saber

Estadística descriptiva

La estadística es una herramienta que permite estudiar datos y manejarlos de manera adecuada para tomar decisiones fundamentadas en los números.Imagina la situación del director de un centro de salud que quiere implementar un programa que tome en cuenta las características de la población de su comunidad, para ello se pregunta si:

a) ¿Se trata de una población formada por familias que viven en el campo? ¿Se trata de una población formada por familias que viven en la ciudad?
b) ¿Las familias cuentan con un promedio de 3 a 5 hijos? ¿Las familias cuentan con un promedio de 1 a 2 hijos?
c) ¿Sus ingresos provienen de tutores que migran para trabajar en otro país? ¿Sus ingresos provienen de tutores que tienen empleo estable y remunerado en la población en la que viven?
d) ¿Los trabajadores realizan trabajo físico extenuante? ¿Los trabajadores realizan labores que implican pasar mucho tiempo sentados?

Selecciona una opción para cada una de las preguntas anteriores, mismas que fueron planteadas por el director de un centro de salud. Con base en ellas, elige una de las siguientes estrategias de atención para beneficiar a la población.

1. Un programa que dé prioridad a padecimientos como el dengue y la desnutrición, que cuente con un esquema de vacunación; que proporcione información sobre planificación familiar; que cuente con capacidad para atender pacientes en situaciones de emergencia sin historial médico preciso y que tenga un buen abastecimiento de medicamentos.

2. Un programa que prevenga e informe sobre problemas de obesidad, estrés y padecimientos cardiacos; que cuente con un historial médico preciso de cada paciente; que recomiende rutinas de ejercicio diario y que tenga convenios con hospitales privados para canalizar a sus pacientes con especialistas.

Discutan las razones por las que seleccionaron una estrategia determinada, y respondan ¿por qué es importante conocer y manejar información de manera adecuada antes de tomar una decisión?

Analiza la siguiente situación y responde las preguntas

En un centro de salud al que asisten 20 familias, se desea estudiar el número de hijos que tiene cada una. Al realizar una encuesta se obtuvieron los siguientes datos:

3, 3, 2, 0, 1, 4, 3, 2, 5, 1, 2, 2, 3, 0, 2, 3, 2, 1, 1, 3

a) ¿Cuál es la población que se va a analizar?, ¿cuántos elementos componen a la población?

b) ¿Cuál es la característica de la población que se desea estudiar?

Cada uno de los datos obtenidos corresponde a la característica elegida, y está asociada con un elemento de la población. El tamaño de la población que analizamos es un dato sumamente importante. Para referirnos a él utilizaremos la variable n. Como en este ejemplo tenemos 20 datos, la variable toma un valor de $n = 20$.

Observa los datos de la siguiente tabla y responde las preguntas.

Número de hijos	Frecuencia $f(x)$	Frecuencia relativa $f_r(x)$	Frecuencia acumulada $F(x)$	F. relativa acumulada $F_r(x)$
0	2	0.10	2	0.10
1	4	0.20	6	0.30
2	6	0.30	12	0.60
3	6	0.30	18	0.90
4	1	0.05	19	0.95
5	1	0.05	20	1.00

a) ¿Con cuál variable se representó al número de hijos en las familias?, ¿qué valores puede tomar esta variable?

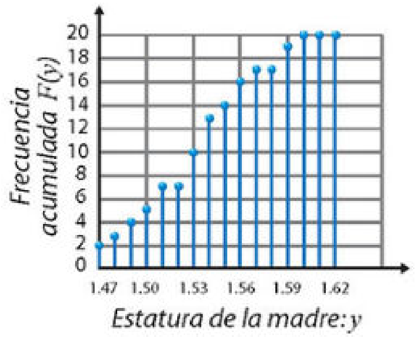
b) ¿Qué representan los datos mostrados en la segunda columna?

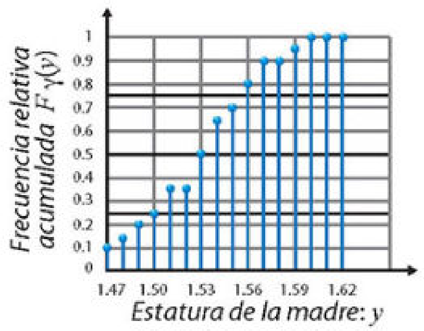
c) A partir de los datos de la segunda columna, ¿cómo se pueden obtener los datos de las otras tres?

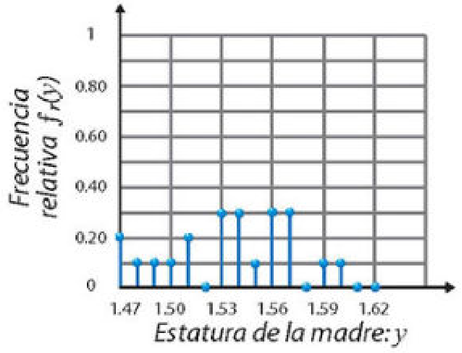
Como habrás notado, la variable x sólo puede tomar valores en los números naturales y de ningún modo tomará valores fraccionarios. Este tipo de variables son conocidas como variables discretas y se obtienen generalmente por conteo.

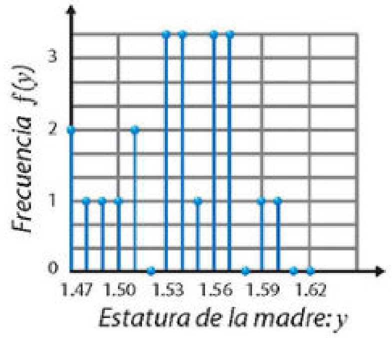
De la tabla anterior se pueden obtener cuatro gráficas distintas que dependen de x.

La primera de ellas, correspondiente a la frecuencia $f(x)$, la cual a cada valor de x le asocia un número natural, y la suma de todos los valores da n, ¿cuántas veces aparece cada uno de los posibles valores de x?









La gráfica de la frecuencia relativa, $f_r(x)$, es una función que a cada valor de x le asocia un número entre 0 y 1, en la que la suma de todos los valores dará 1.

La gráfica de $F(x)$, es una función que a cada valor de x le asocia un número natural que irá creciendo hasta igualar el tamaño n de la población.

Finalmente, $F_r(x)$, es una función que a cada valor de x le asocia un número positivo que irá creciendo hasta llegar a 1. Observa que los valores de las frecuencias relativas corresponden directamente a porcentajes. En la gráfica de frecuencias relativas acumuladas, $F_r(x)$, puede verse que el 90% (0.9) de las familias tiene menos de 4 hijos.

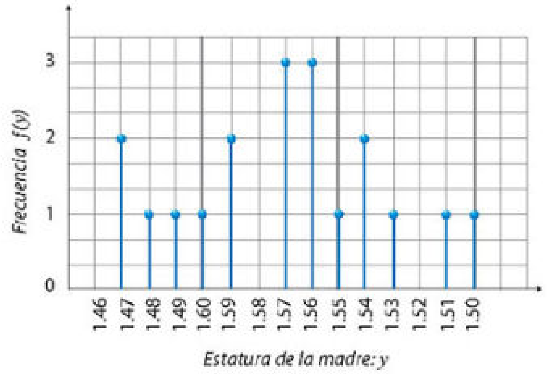
Realicen la siguiente actividad.

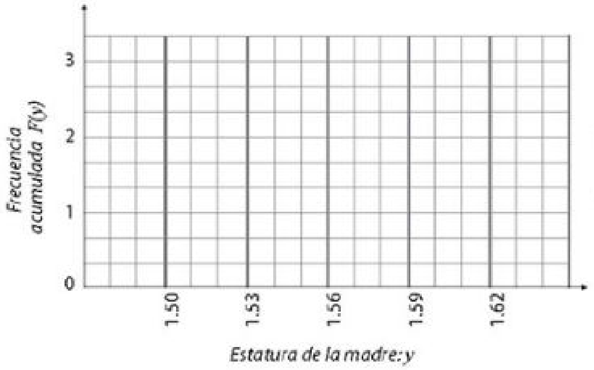
Si destacamos como característica la estatura de la madre de familia, estaríamos ante una variable continua que puede tomar cualquier valor y que se obtiene por medición.

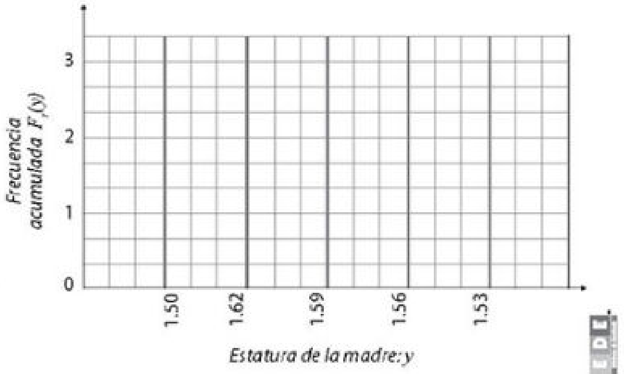
Observen los valores obtenidos, completen la tabla y las gráficas correspondientes.

1.47, 1.47, 1.48, 1.49, 1.50, 1.51, 1.51, 1.53, 1.53, 1.53,
1.54, 1.54, 1.54, 1.55, 1.56, 1.56, 1.57, 1.57, 1.59, 1.60

Estatura de la madre (y)	Frecuencia $f(\quad)$	Frecuencia relativa $f_r(x)$	Frecuencia acumulada $F(x)$	F. relativa acumulada $F_r(x)$
1.47	2	0.10	2	0.10
1.48	1	0.05	3	0.15
1.49	1	0.05		0.20
1.50				
1.51				
1.52				
1.53				
1.54				
1.55				
1.56				
1.57				
1.58				
1.59				
1.60				







1. ¿La estatura del 50% de las madres que asisten al centro de salud está por debajo de qué valor?
2. ¿Cuál es la mediana del conjunto de estaturas?
3. ¿Qué porcentaje constituyen las madres que miden más de 1.56?

Un ejercicio de imaginación

Realiza la siguiente actividad.

Piensa en una jaula con aves. Define claramente el tamaño, los colores, la forma de la jaula y sus habitantes; en tu cuaderno dibuja y colorea con detalle lo que imaginaste.

Una vez que tú y tus compañeros hayan hecho sus dibujos, seleccionen una de las siguientes opciones para analizar la cantidad de aves en el dibujo.

Opción 1

Trabajen con una tabla del tamaño que sea necesario; si hay 36 alumnos, habrá 36 elementos en los que podremos identificar la característica "cantidad de aves en el dibujo".

Opción 2

Organícense en equipos según como están sentados y elijan al azar 20 dibujos. Es importante que la elección sea al azar, pueden hacerlo sacando 20 papelitos donde aparezcan los números de lista de todos los compañeros. Recuerden que "al azar" no significa "el que sea", sino que "todos tengan la misma probabilidad de ser seleccionados".

1. Una vez que han seleccionado una opción de trabajo, elaboren una tabla con los datos obtenidos, como la que se muestra a continuación.

Cantidad de aves en el dibujo (valor de x)	Frecuencia $f(x)$	Frecuencia relativa $f_r(x)$	Frecuencia acumulada $F(x)$	Frecuencia relativa acumulada $F_r(x)$
0				
1				
2				
3				
4				
5				
6				
7				
8				
9				
10				

2. Realicen en su cuaderno las gráficas correspondientes a $f(x)$, $f_r(x)$, $F(x)$ y $F_r(x)$.
   a) Identifiquen la moda (si es que hay sólo una), la mediana y el promedio de la "cantidad de aves".
   b) ¿Cuál de las tres medidas de tendencia central que acaban de identificar resume mejor la "cantidad de aves" imaginadas por los alumnos de su grupo?, ¿por qué?
   c) ¿Qué conclusión obtienen con respecto a la cantidad de aves imaginadas por ustedes y sus compañeros?
   d) Utilizando la gráfica de $F_r(x)$, identifiquen la cantidad de aves que divide en dos grupos del mismo tamaño los dibujos de los alumnos. Comparen su resultado con la mediana del conjunto.

Supongan que ahora interesa analizar la variable "color de las aves", respondan las siguientes preguntas.

a) ¿Esta variable es de tipo numérico?, ¿qué dificultades podrían encontrar para recolectar y analizar los datos?

b) ¿Qué criterio utilizarían para ordenar en la línea recta las variables: amarillo, verde pistache, gris, rosa, azul pastel, etcétera?

Es importante que registren cada dibujo una sola vez, de modo que si alguien imaginó 4 aves de colores (rosa, azul, blanco y verde), no deben registrar 4 veces, sino llenar una sola columna que puede ser, por ejemplo: "colores claros", "colores brillantes" o bien "colores mixtos".

c) ¿Qué información pueden obtener analizando las frecuencias de esta variable?

d) Elaboren en su cuaderno una tabla de frecuencias y la gráfica correspondiente.

e) ¿Qué medida de tendencia central tiene sentido en este caso: la media, la mediana o la moda?

f) ¿Notan algún patrón con respecto al color de las aves imaginadas?

Imagina que hoy llega a la clase un compañero nuevo y se le pide que realice el ejercicio de pensar y dibujar una jaula con aves. Responde las siguientes preguntas basándote en el análisis de datos que acabas de realizar.

a) ¿Qué piensas que será más probable, que dibuje entre 1 y 10 aves o que dibuje más de 10?

b) ¿Qué será más probable que dibuje aves amarillas o negras?

c) ¿Qué consideras más probable que dibuje 30 buitres negros en una jaula de zoológico o que dibuje 4 canarios amarillos en una pequeña jaula doméstica de alambre?

d) ¿Los resultados de este experimento en el grupo nos dicen algo sobre la imaginación de las personas que no pertenecen a tu grupo?, ¿por qué?

Realicen las siguientes actividades con sus compañeros de escuela.

Mi encuesta

Reunidos en equipo, soliciten al profesor de primer grado que les preste una lista de su grupo y realicen la siguiente actividad.

Seleccionen al azar a cinco alumnos (los cuales deben ignorar los resultados de tu investigación grupal) y soliciten que realicen el ejercicio de imaginar y dibujar una jaula con aves. Esta selección recibe el nombre de *muestreo aleatorio.*

1. Indiquen a los alumnos que deben definir claramente el tamaño, los colores y la forma de la jaula y de sus habitantes.
2. Ahora, analicen los cinco dibujos y completen la siguiente tabla.

Persona que hizo el dibujo	Número de aves	Diferencia con la mediana del número de aves obtenida en mi grupo	Color de las aves	Frecuencia relativa de ese color de aves obtenida en mi grupo

Hagamos de cuenta que uno de los participantes dibujó 7 periquitos australianos de colores verde pistache, azul pastel y amarillo; supón también que en tu grupo la mediana fue 3 y que la frecuencia relativa de "colores claros" fue de $\frac{25}{40} = 0.625$, es decir el 62.5%; entonces, registrarán un renglón como el siguiente ejemplo.

Persona que hizo el dibujo	Número de aves	Diferencia con la mediana del número de aves obtenida en mi grupo	Color de las aves	Frecuencia relativa de ese color de aves obtenida en mi grupo
Sr. José María Pérez (mi abuelo)	7	$7 - 3 = 4$	Colores claros	0.625

3. Una vez que han llenado su tabla, respondan las siguientes preguntas.
   a) ¿Cuántos entrevistados se alejaron de la mediana obtenida en su grupo en más de 5 aves?
   b) ¿Cuántos de sus entrevistados eligieron para sus aves un color cuya frecuencia relativa en su grupo haya sido de 0?
   c) Según lo observado al interior de su grupo, ¿consideran que sus entrevistados eligieron resultados "muy probables" o "poco probables"?
4. ¿Consideran que sus entrevistados dieron una repuesta creativa o una respuesta común al ejercicio de la jaula con aves?
5. Justifiquen su respuesta usando como argumento la información estadística.

El *rally* de mate

En una escuela secundaria, el profesor de matemáticas va a realizar un *rally* entre dos grupos de distinto grado. A continuación se muestran los años cumplidos de los integrantes de cada equipo que participará en la competencia.

Equipo de primer grado: 13, 13, 12, 12, 12, 13, 12, 13, 50, 12, 12, 14, 12, 13, 12

Equipo de tercer grado: 16, 15, 14, 14, 14, 16, 15, 15, 16, 15, 14, 15, 15, 15, 14

Analiza los datos que se proporcionaron y realiza los pasos que se indican.

1. Para hacer un análisis de los datos, define lo siguiente.
   a) Población 1: ____________________
   b) Tamaño de la población 1: $n_1 =$ ____________
   c) Población 2: ____________________
   d) Tamaño de la población 2: $n_2 =$ ____________
   e) Característica a estudiar en ambas poblaciones: ____________
   f) Tipo de variable asociada a la característica (discreta o continua): ____________

2. Una vez que has definido lo que se estudiará, realiza las tablas y responde lo siguiente.
   a) ¿En cuál de los equipos es mayor la edad de los jugadores?
   b) ¿Cuál de las tres medidas de tendencia central te permite obtener esta conclusión?
   c) ¿En este caso, la moda es una buena medida?, ¿por qué?
   d) ¿El promedio es una medida adecuada para este caso?, ¿por qué?
   e) ¿En este caso, la mediana es una buena medida?, ¿por qué?

En esta actividad se ha elegido un conjunto de datos en el que todos los valores son muy cercanos entre sí, excepto uno. La edad del profesor "pesa" mucho con respecto a las edades de sus alumnos y "jala" con mucha fuerza al promedio, a pesar de ser uno entre muchos valores. Es importante tomar en cuenta qué medida de tendencia elegimos cuando reportamos nuestros resultados, evitando así que la estadística se vuelva "una manera elegante de mentir" al convencer a quien la lee de que los integrantes del equipo de primero son mayores que los del equipo de tercero, pues su promedio de edad es mayor.

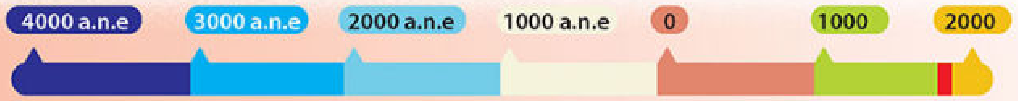
Un proyecto de investigación

Utilicen las herramientas que ya conocen sobre tratamiento de la información para definir un proyecto de investigación.

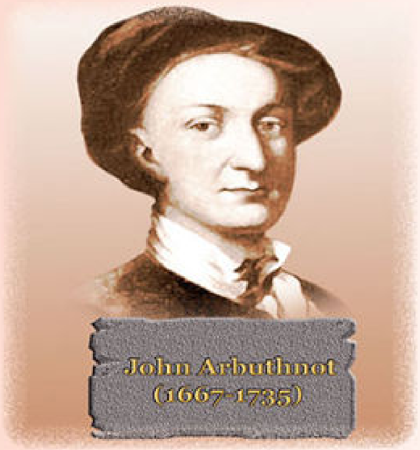
1. Es importante que las decisiones se tomen a través de una discusión respetuosa, tolerante y colectiva en la que elijan un tema que les interese. Las siguientes son algunas sugerencias, pueden tomar como base o elegir una cuestión totalmente distinta.

2. Definan claramente:
   - La población objetivo y su tamaño
   - Las características que quieren estudiar
   - La manera en la que obtendrán la información
   - El método con el que registrarán y analizarán la información obtenida
   - El tipo de gráfico que utilizarán
   - La información que piensan extraer acerca de la población estudiada
   - Las medidas de tendencia central adecuadas para la información que tienen
   - ¿En qué contexto será válida su información? Piensen en el ejemplo de la jaula y las aves, ¿el trabajo realizado en el salón de clases les permitiría predecir lo que imaginarían personas entrevistadas al azar en la calle o a estudiantes de una carrera de arte?

3. Decidan cuidadosamente a quiénes les interesa que llegue la información que han analizado, elaboren una exposición con el trabajo del grupo y muéstrenlo a la comunidad escolar.



La historia de la estadística es interesante y data desde hace siglos. Se ha usado para dar explicaciones en temas tan diversos que no podrías imaginarlo. Veamos un ejemplo que data del año 1710 en donde el médico John Arbuthnot usa esta rama de las matemáticas para dar explicaciones a las preguntas de su época.



De acuerdo con las estadísticas disponibles, durante 82 años habían nacido en Londres más niños que niñas. Si el nacimiento dependiera exclusivamente del azar, como "águila" o "sol" al lanzar una moneda, esto sería incomprensible, porque la probabilidad de obtener "águila" 82 veces en una sucesión es $\left(\frac{25}{40}\right)^{82} = 2 \times 10^{-82}$. Razonablemente se puede declarar que cualquier cosa con un grado tan pequeño de probabilidad es imposible.

Arbuthnot notó en los censos de Londres un patrón muy interesante; suponiendo que la probabilidad de que nazca un niño o una niña es $\left(\frac{1}{2}\right)$; equivale numéricamente a decir que es imposible que te saques el premio mayor de la lotería 5 veces a lo largo de tu vida, Arbuthnot usó esta observación para argumentar que el sexo no está distribuido entre la descendencia humana en una forma enteramente casual y por lo tanto, debe existir una providencia divina que interfiere para controlar las proporciones de los sexos. La "demostración" de Arbuthnot es el primer ejemplo conocido de "inferencia estadística".

Adaptado de: *Elementos de probabilidad y estadística* de A. Hernández del Valle y O. Hernández Lerma, 2003.

Realicen una investigación en torno a algunos sucesos históricos importantes para la ciencia en donde se ha utilizado la inferencia estadística y compartan su información con el grupo.

Analicen y reflexionen el siguiente enunciado.

A propósito de un mal uso de la estadística, a manera de broma suele decirse: "si una persona mete los pies en una cubeta con hielos y sal (−15º) y la cabeza en agua hirviendo (95º), la temperatura promedio a la que se encuentra esa persona la haría sentirse como si estuviera en Acapulco".

a) ¿Es cierto lo que se asegura en el párrafo anterior?

b) ¿Creen que la televisión y otros medios de comunicación pueden usar resultados estadísticos de manera engañosa para transmitir una idea falsa de la realidad?

c) ¿Cuál es la importancia de conocer y entender el uso adecuado de la estadística?

Completen los siguientes enunciados relativos a algunos conceptos importantes dentro de un estudio estadístico.

1. Al conjunto de elementos que serán estudiados se le llama ______________.
2. Al número de elementos en la población a estudiar se le llama ______________.
3. En cada población es de interés el estudio de una o más ______________, a las que se les llama también variables de respuesta.
4. Cada variable de respuesta puede tomar valores, que son igualmente conocidos como ______________.
5. Cuando los valores son números naturales, la variable de respuesta es una variable ____________ que por lo general se obtiene por conteo, pero si los valores pueden ser cualquier número, incluidas fracciones y/o números negativos, estamos ante una ______________que se obtiene por ______________.

Elabora en tu cuaderno un diagrama para generar tus notas sobre la elaboración y análisis de encuestas. Si es necesario agrega más elementos.

Lee, analiza la información presentada y resuelve las siguientes situaciones problemáticas.

Una compañía telefónica ofrece a sus usuarios tres planes de renta mensual que consisten en lo siguiente:

Plan 1:
- a) Costo de la renta mensual: \$300.00
- b) Costo por 100 llamadas y 50 mensajes: \$220.50
- c) Costo de 400 Mb de datos: Gratis

Plan 2:
- a) Costo de la renta mensual: \$350.00
- b) Costo por 150 llamadas: \$117.00
- c) Costo por mensaje: Gratis
- d) Costo de 600 Mb de datos: \$400.00

Plan 3:
- a) Costo de la renta mensual: \$390.00
- b) Costo por 200 llamadas y 200 mensajes: \$350
- c) Costo de 800 Mb de datos: \$400.00

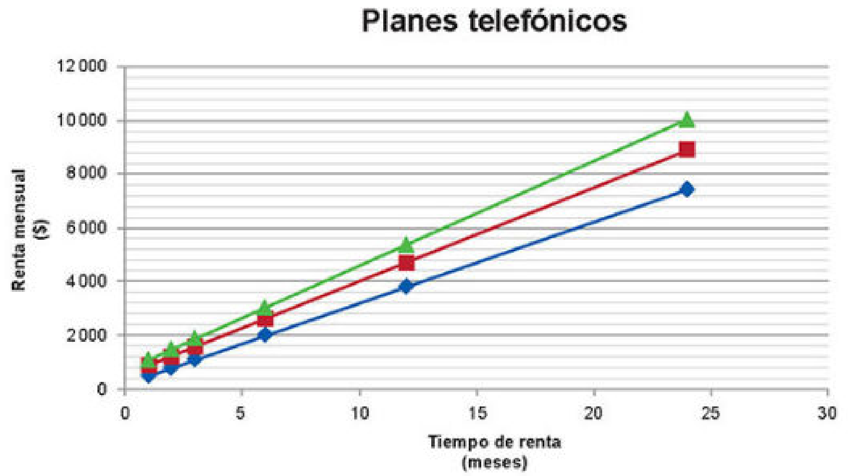
1. ¿Qué expresiones representan los planes telefónicos mensuales?
- a) $300x + 220.5$, $350x + 517$ y $390x + 750$
- b) $300x^2 + 620.5$, $517x^2 + 350$ y $390x^2 + 400$
- c) $220.5x + 300$, $350x + 517$ y $350x + 290$
- d) $220.5x^2 + 550$, $400x^2 + 117$ y $350x^2 + 700$

2. Rafael desea cambiar su plan a esta compañía. Utiliza 350 Mb mensualmente y todos los días le escribe 20 mensajes a su novia, además de llamarle a su amigo Juan cuatro veces por día, por lo que le conviene elegir el Plan 2. ¿Por qué?
- a) Porque necesita cubrir exclusivamente 120 llamadas y sólo usar datos escasos.
- b) Porque por 200 mensajes sólo paga \$350 y tiene 400 Mb de datos gratis.
- c) Porque necesita cubrir al menos 120 llamadas y poder enviar muchos mensajes.
- d) Porque requiere poder enviar muchos mensajes y sólo usar datos escasos.

3. Noemí usa sus redes sociales y correo electrónico para estar en contacto con su familia que vive en Europa, por lo que necesita más de 500 Mb al mes. ¿Cuál es el costo por Mb que tienen los planes por los datos?
- a) Gratis, \$0.67 y \$0.50
- b) Gratis, \$0.76 y \$0.50
- c) \$0.50, \$0.50 y Gratis
- d) \$0.67, \$0.67 y Gratis

4. Si decidieras contratar el plan más económico para hacer, en promedio, 130 llamadas y enviar 350 mensajes al mes usando 400 Mb de datos, ¿cuál plan deberías contratar?
- a) Plan 1, porque los datos son gratis
- b) Plan 2, porque incluye las llamadas y datos que necesitas
- c) Plan 3, porque sobrarían llamadas y datos
- d) Plan 1, porque las llamadas son gratis

En la siguiente gráfica se representan los planes telefónicos. Analízala y contesta las preguntas.



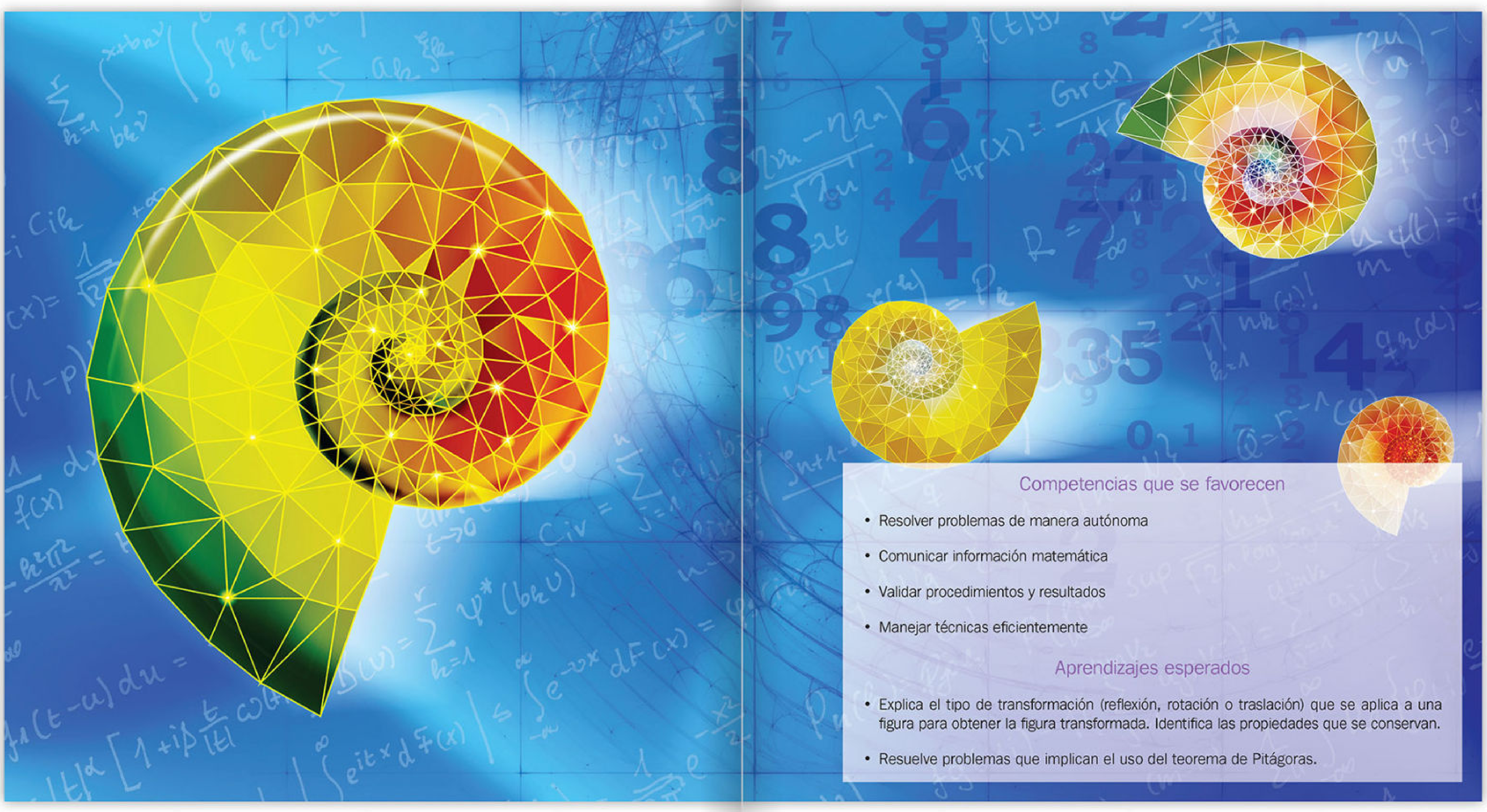
1. De acuerdo con las gráficas, elige la opción que enumere los colores de acuerdo con el Plan 2, Plan 1 y Plan 3:
- a) azul, rojo y verde
- b) rojo, azul y verde
- c) rojo, verde y azul
- d) verde, azul y rojo

2. De acuerdo con la gráfica, ¿cuál es el costo de contratar un paquete durante un año con el Plan 1?
- a) \$3 820.50
- b) \$3 520.00
- c) \$520.50
- d) \$300.00

3. ¿En cuál mes se puede decir que los tres paquetes cuestan lo mismo?
- a) En el 0
- b) En el 6
- c) En el 12
- d) En el 24

4. ¿Qué significa que las tres rectas no se intersequen en ningún punto?
- a) Que sus costos son iguales
- b) Que sus costos son variables
- c) Que el costo de cada plan es independiente
- d) Que el costo de cada plan depende de otros

Utiliza este código para conocer lo que aprendiste en este bloque sobre los criterios de congruencia en diversos pares de triángulos.



Competencias que se favorecen

- Resolver problemas de manera autónoma
- Comunicar información matemática
- Validar procedimientos y resultados
- Manejar técnicas eficientemente

Aprendizajes esperados

- Explica el tipo de transformación (reflexión, rotación o traslación) que se aplica a una figura para obtener la figura transformada. Identifica las propiedades que se conservan.
- Resuelve problemas que implican el uso del teorema de Pitágoras.

Sentido numérico y pensamiento algebraico

Patrones y ecuaciones

Uso de ecuaciones cuadráticas para modelar situaciones y resolverlas usando la factorización

Reactivando el saber

Lee el siguiente problema y responde lo que se solicita.

Un terreno rectangular, cuyos lados se encuentran en proporción 4:3, tiene un área de 588 m^2. El dueño necesita comprar malla para rodear y proteger su terreno. ¿Cuáles son las dimensiones del terreno?, ¿cuántos metros de malla necesita comprar el dueño?

¿Cómo podrías determinar el largo y ancho del terreno si no cuentas con un instrumento de medición? ¿La solución al problema será única?, ¿por qué?

Responde las siguientes preguntas para que le ayudes al dueño del terreno a resolver su problema.

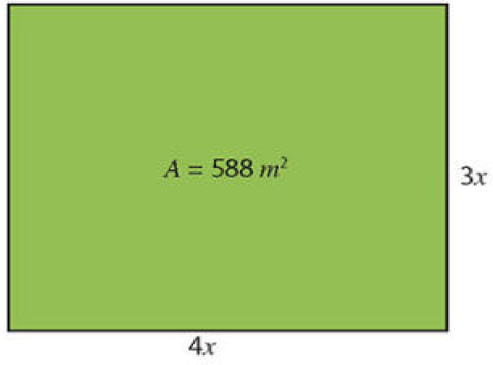
a) Observa la figura, ¿por qué se pueden expresar las longitudes de los lados del terreno como $4x$ y $3x$?

b) Considerando $4x$ y $3x$ las medidas de los lados, ¿cómo se expresa el perímetro?

c) ¿Cómo se expresa el área del terreno?

d) A partir de la expresión que planteaste anteriormente, determina el valor de x y usa este valor para encontrar las dimensiones del terreno.

e) Verifica tu respuesta, ¿qué procedimiento seguiste?

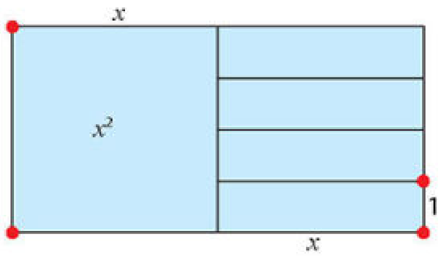


f) ¿Cuál es el valor del perímetro?

g) Para resolver este problema resolviste una ecuación cuadrática de la forma $ax^2 = b$, que se puede escribir en la forma $ax^2 - b = 0$. ¿Qué valores corresponden a a y b en este problema? $a =$ _________ y $b =$ _________.

Lean la siguiente situación, discutan en torno a ella y resuelvan lo que se solicita.

Se quiere decorar un piso alternando tablillas rectangulares con losetas cuadradas. Para ello, junto a cada loseta cuadrada se colocan cuatro tablillas de 1 dm de ancho y x dm de largo, de tal forma que éstas forman un cuadrado, como se muestra en la figura.



a) ¿Cuál es el único número (x), aparte del cero, que multiplicado por 4 es igual a su cuadrado (x^2)?

b) Escriban una ecuación de la forma $x^2 = bx$ equivalente al planteamiento anterior. ¿Qué valor toma b en este caso?

c) Ahora escriban esa ecuación en la forma $x^2 - bx = 0$ y exprésenla como el producto de x por otro factor: $x(x - b) = 0$

d) Ya saben que si el producto de dos números es cero, es porque alguno de esos dos números es el cero. De acuerdo con el planteamiento del problema, ¿podría x ser igual a cero? _________ ¿por qué?

e) Si el producto de $x(x - b)$ es cero, pero x no puede ser cero, ¿entonces qué se deduce? _________

f) Del razonamiento anterior se obtiene que $x =$ _________.

Al razonamiento anterior se le conoce como factorización, que es la aplicación de la propiedad distributiva de la multiplicación para expresar un producto, es decir, factorizar en lugar de desarrollar un producto.

Aplica la factorización para resolver las siguientes ecuaciones.

a) $x^2 = 3x$

b) $x^2 - 25 = 0$

c) $x^2 + 25 = 0$

Analicen las siguientes situaciones y realicen lo que se solicita.

1. Si a un número x se le restan 5 unidades y el resultado se multiplica por el número original, se obtiene cero. ¿De qué número se trata?
   a) Escriban la ecuación correspondiente y resuélvanla.
2. Un número multiplicado por sí mismo o por 5 da el mismo resultado. ¿Cuál es ese número?
   a) Escriban la ecuación que corresponde y resuélvanla.
3. Con la finalidad de comparar las ecuaciones que encontraron, respondan las siguientes preguntas y realicen lo que se pide.
   a) ¿Coinciden las soluciones? Con base en su respuesta, ¿son equivalentes las ecuaciones que plantearon?, ¿por qué?
   b) Tracen una figura similar a la de la página 78, y utilícenla para verificar que la solución que encontraron es correcta.

Bloque 2

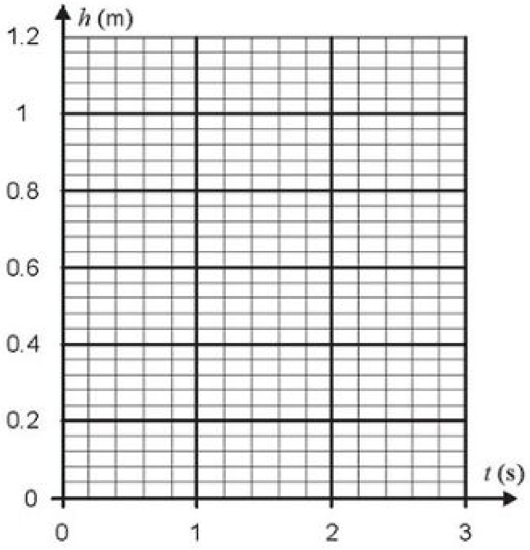
Lee la siguiente situación y, con base en la ecuación cuadrática $c=bx+ax^2$, realiza lo que se solicita.

Una pelota se lanza hacia arriba con una velocidad vertical de 15 m/s, de acuerdo con las ecuaciones de movimiento que se desprenden de la segunda ley de Newton, la altura h que alcanza la pelota —dada en metros— en cada instante t —dado en segundos— está dada por la función cuadrática:

$$h = 15t - 5t^2$$

a) Completa la tabla calculando la altura que alcanza la pelota en distintos momentos.

b) Grafica los puntos de la tabla y únelos con una curva suave.



t	0	0.4	0.8	1.2	1.6	2	2.4
$h = 15t - 5t^2$							

c) Usa la función cuadrática para calcular la altura que alcanza la pelota en el segundo 1 y en el segundo 2. Agrega estos puntos a la gráfica.

d) ¿Coinciden estos valores?, ¿a qué crees que se deba?

e) Plantea una ecuación cuadrática para encontrar el tiempo que tarda la pelota en regresar al suelo. Resuélvela e indica cuánto tiempo tarda.

f) Usa la propiedad de simetría de la gráfica para que señales en qué tiempo la pelota alcanza su máxima altura.

g) Calcula la altura máxima y agrega el punto a la gráfica.

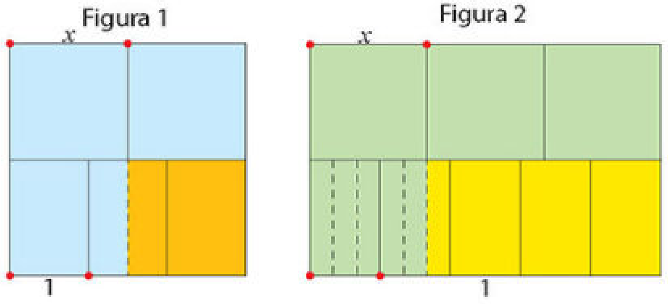
Todas las ecuaciones del tipo $ax^2 - bx = 0$ pueden resolverse mediante la factorización, para reconocerlas y saber cómo manejarlas, es necesario que antes se desarrollen algunas actividades.

Explora

Para reforzar tus aprendizajes accede al siguiente sitio electrónico:
http://www.montereyinstitute.org/courses/Algebra1/COURSE_TEXT_RESOURCE/U10_L1_T1_text_final_es.html
(Consulta: 13 de enero 2015).

Lean cada uno de los planteamientos y respondan lo que se solicita.

1. Una de las siguientes figuras pone en evidencia la solución de la ecuación cuadrática $2x^2 = 3x$. ¿Cuál de las dos es?



a) ¿Cuál es la solución que sugiere la figura?

b) Además de esa solución, hay otra que no muestra la figura, pero que satisface la ecuación, ¿cuál es?

c) Factoricen la ecuación y, algebraicamente, encuentren ambas soluciones.

d) Escriban la ecuación que corresponde a la otra figura y, con base en ésta, respondan los incisos a, b y c.

2. En el siguiente espacio, construyan una figura similar a la del planteamiento 1, pero que represente a la ecuación $3x^2 = 7x$.

a) ¿Qué fracción representaron en los lados de la malla?

b) ¿Qué solución les sugiere la figura que dibujaron?

c) ¿Qué soluciones se obtienen de manera algebraica?

Lee y resuelve los siguientes ejercicios.

Aplica la propiedad distributiva para expandir las siguientes expresiones.

a) $x(x + 3) =$

b) $2x(x - 5) =$

c) $-3x(2x + 4) =$

2. Aplica la misma propiedad distributiva, pero en sentido contrario, para agrupar los términos.

   a) $x^2 + 3x =$

   b) $5x^2 + 15x =$

   c) $5x^2 - 10x =$

   d) $5x^2 + 8x =$

   e) ¿Las ecuaciones de este ejercicio resultaron más sencillas que las del ejercicio 1?, ¿por qué?

3. Resuelve las siguientes ecuaciones por medio de la factorización. No olvides atender las indicaciones en caso de que las haya.

   a) $x^2 - 5x = 0$

   b) $x^2 - 7x = 0$, pero $x \neq 7$

   c) $x^2 - 7x = 0,\ x \neq 0$

   d) $x^2 - x = 4x$

   e) $2x^2 + 3x = x - 5x^2$

Función cuadrática generalizada

Hasta ahora has resuelto ecuaciones de la forma $ax^2 = 0$ y $ax^2 + bx = 0$, las cuales hacen referencia a funciones cuadráticas cuya gráfica pasa por el origen. El caso general está dado por la función cuadrática $y = ax^2 + bx + c$, en donde a, b y c son las constantes, o parámetros, que determinan las cualidades de la gráfica. En efecto, todas son parábolas, pero pueden abrir hacia arriba o hacia abajo, pueden ser anchas o angostas y pasar o no por el origen.

Explora

Para conocer el efecto que tienen estos parámetros sobre la forma y posición de la gráfica, te sugerimos ingresar a la siguiente página electrónica. En ésta podrás variar, en forma continua, los valores de los parámetros, moviendo con el ratón un deslizador, para que observes el efecto que tienen sobre la gráfica.

http://mathopenref.com/quadraticexplorer.html.

(Consulta: 1 de octubre de 2014).

Realicen la siguiente actividad.

a) Calculen los valores que se solicitan en la siguiente tabla y mediante una ecuación, encuentren dos números naturales consecutivos, cuyo producto sea el valor que se indica:

5×6	6×7	7×8	8×9	$n \times (n + 1)$
				156

$n =$ ____________

b) ¿Habrá dos números naturales consecutivos, cuyo producto sea 1 722? ¿Y dos números consecutivos cuyo producto sea 24 806?

c) ¿Qué ecuaciones plantearon para las preguntas del inciso a?

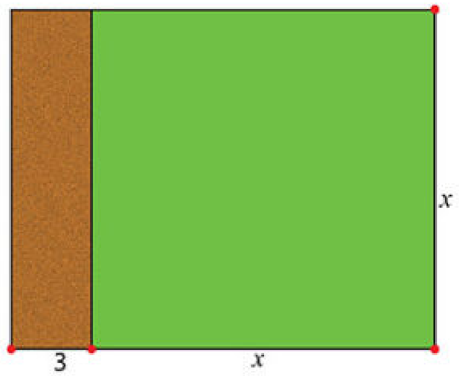
d) Si las resolvieron solos. ¿Cómo lo hicieron?

e) Expresen los siguientes enunciados en forma de ecuación y respondan las preguntas que se incluyen en cada uno.

- Al multiplicar dos números consecutivos, se obtiene el cuadrado del menor. ¿Cuáles son estos números? ¿Cuántas posibilidades de números que cumplan con este enunciado hay?
- Al multiplicar dos números consecutivos se obtiene el cuadrado del mayor. ¿De qué números se trata? ¿Cuántas posibles respuestas hay?

Resuelve el siguiente problema poniendo en práctica los aprendizajes que has adquirido hasta ahora.

Dentro de un terreno de 180 m² se colocó una porción cuadrada de césped y una franja adoquinada de 3 m de ancho, tal como se ilustra en la figura.



1. En términos de la variable x, ¿cómo se expresan las dimensiones del terreno y su área?
   Largo = ____________ Ancho = ____________
   Área = ____________

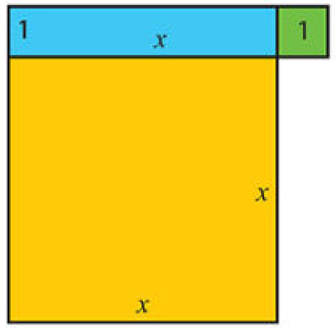
2. Plantea y resuelve una ecuación cuadrática para que averigües el valor de la cantidad desconocida, después contesta las siguientes preguntas:

   a) ¿Cuántos metros cuadrados de césped se colocaron en el terreno?

   b) ¿Cuántos metros cuadrados de adoquín se colocaron?

Compara tus respuestas con las de otros compañeros y discutan acerca de los distintos métodos que utilizaron para plantear y resolver la ecuación.

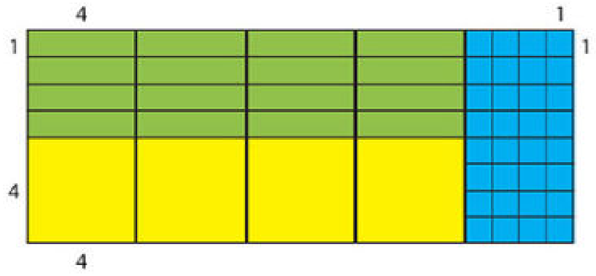
Algunas ecuaciones de este tipo pueden factorizarse. ¿Cómo reconocerlas? y, dado el caso, ¿cómo se factorizan? Averígualo realizando las siguientes actividades.



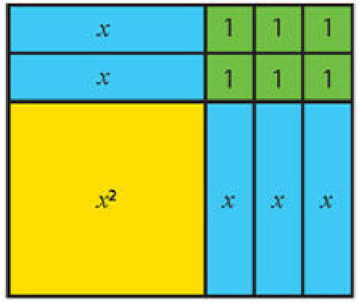
Arma y analiza un rectángulo rompecabezas.

Observa las tres piezas básicas: Un cuadrado de lado x, un rectángulo de dimensiones, $1 \times x$ y un cuadrado más pequeño de lado 1. Se elige el número x porque la idea principal de esta actividad no depende de ese valor y puede ser cualquiera:

Para facilitar el trabajo de armar el rectángulo rompecabezas, recorta varias piezas con la siguiente forma, por ejemplo, sacándolas de una cartulina de 8 × 20 cm como se muestra en la figura:



Con estas piezas se puede componer un rectángulo.



El área de la figura compuesta se forma con

1 cuadrado de área: x^2

$3 + 2 = 5$ rectángulos de área: x

$3 \times 2 = 6$ cuadrados de área: 1

La suma da el área total: $x^2 + 5x + 6$

Por otro lado , el área total es: $(x + 3)\ (x + 2)$

1. Tomando como referencia el rectángulo así armado, completa el siguiente texto analizando el rectángulo descompuesto en esos elementos básicos:

Dado que su base mide __________ y su altura está dada por __________, el área de la figura compuesta es el producto __________. Por otro lado, de acuerdo con la forma en que se acomodan las partes alrededor del cuadrado mayor de área __________, a su derecha hay 3 rectángulos verticales de área __________, y arriba 2 de la misma área. Por lo tanto se tienen un total de $3 + 2 = 5$ rectángulos de área, x y $3 \times 2 = 6$ cuadrados de área 1, tal como se menciona a la derecha de la figura. De este modo, el área del rectángulo está dada también por la suma __________.

Observa cómo, del razonamiento anterior, se desprende la siguiente identidad:

$$(x + 2)(x + 3) = x^2 + 5x + 6$$

Forma factorizada   Forma desarrollada

En ésta se muestra la misma función cuadrática, sólo que una se expresa en forma factorizada y la otra en forma desarrollada. Observa la relación que tienen los números 2 y 3 con la expresión cuadrática desarrollada, ya que la suma de ambos es $+ 5$ y su producto es $+ 6$.

2. Usa un cuadrado amarillo, 8 rectángulos azules y 15 cuadrados verdes para que con ellos construyas un rectángulo que te sirva para factorizar la expresión cuadrática $x^2 + 8x + 15$. De ese rectángulo puedes obtener dos enteros cuya suma sea 8 y su producto 15. Estos enteros son __________ y __________. Con ellos puedes obtener la expresión factorizada, escríbela:

$$x^2 + 8x + 15 = (\qquad)(\qquad)$$

3. Encuentra las figuras necesarias que te permitan factorizar la expresión $x^2 + 6x + 5$.
   a) ¿Cuántos cuadrados de área x^2 debes usar?
   b) ¿Cuántos rectángulos de área x necesitas?
   c) ¿Cuántos cuadrados de área 1 son necesarios?
   d) Acomoda las piezas de tal forma que construyas un rectángulo.
   e) ¿Cuánto miden los lados del rectángulo armado y cuál es su área?
   f) Para que concluyas, escribe la forma factorizada que encontraste de $x^2 + 6x + 5$.
   g) Hay dos números enteros cuya suma es 6 y su producto 5, ¿de qué números se trata?

Bloque 2

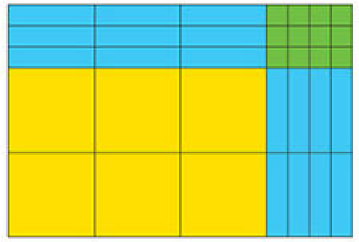
El método hasta ahora aplicado para factorizar, también es aplicable cuando los coeficientes son negativos; por ejemplo, para la expresión cuadrática $x^2 + x - 2$ se reconocen dos enteros cuya suma es 1 y su producto -2. Estos números son 2y -1, ya que $2 - 1 = 1$ y $(2)(-1) = -2$, quedando así la expresión factorizada $x^2 + x - 2 = (x + 2)(x - 1)$.

4. Algunas de las siguientes expresiones cuadráticas son **factorizables**. Identifícalas, con cálculo mental, encontrando dos enteros cuya suma y producto sean los que convengan en cada caso.

a) $x^2 + x - 6$	e) $x^2 - 4x - 21$
b) $x^2 - 2x - 8$	f) $x^2 + 28x + 27$
c) $x^2 + 9x - 15$	g) $x^2 + 6x - 16$
d) $x^2 + 10x + 16$	h) $x^2 - 6x - 16$

Palabra Mu

factorizable. Expresión que puede descomponerse como producto de otras de menor grado.

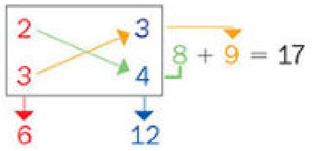


Observa la figura que se muestra a la derecha. A ésta le corresponden:

- La expresión desarrollada: $6x^2 + 17x + 12$
- La expresión factorizada: $(2x + 3)(3x + 4)$

Pero también observa cómo se relacionan los coeficientes de ambas expresiones.

Arreglando los coeficientes de la expresión factorizada en un rectángulo, se obtienen con facilidad los coeficientes de la expresión desarrollada: multiplicando los que aparecen en ambos lados del rectángulo, y sumando los productos de sus diagonales.



De este modo, para resolver la ecuación $6x^2 + 17x + 12 = 0$, bastaría con plantear la ecuación equivalente en forma factorizada $(2x + 3)(3x + 4) = 0$, que equivale a las dos ecuaciones lineales $2x + 3 = 0$ y $3x + 4 = 0$, cuyas soluciones son $x = \frac{-3}{2}$ y $x = \frac{-4}{3}$.

Como habrás notado, los rompecabezas sólo sirven cuando todos los coeficientes de la ecuación desarrollada son positivos, pero el último arreglo rectangular podrá aplicarse aun cuando haya coeficientes negativos.

Con la finalidad de que investiguen una forma de resolver la ecuación cuadrática $6x^2 + x - 15 = 0$, realicen la siguiente actividad.

1. Primero deben reconocer el coeficiente cuadrático 6, el coeficiente lineal 1 y el término independiente -15.

2. Después, es necesario trazar un rectángulo, escribiendo en su parte inferior, del lado izquierdo el coeficiente cuadrático y del lado derecho el término independiente, tal como se muestra en la siguiente figura.

$$\begin{array}{|cc|}\hline & \\ & \\ \hline \multicolumn{1}{c}{6} & \multicolumn{1}{c}{-15}\end{array}$$

3. Del lado izquierdo coloquen dos factores de 6, por ejemplo $\frac{1}{6}$ o $\frac{2}{3}$ y del lado derecho dos factores de 15, por ejemplo $\frac{1}{-15}$, $\frac{-1}{15}$, $\frac{3}{-5}$, $\frac{5}{-3}$, $\frac{-5}{3}$, $\frac{15}{-1}$ o $\frac{-15}{1}$. Para los números que hayan escogido, calculen la suma de los productos de las diagonales y verifiquen si obtienen el coeficiente lineal 1.

4. Si esto no ocurre, conservando los mismos factores de 6, propongan otros dos factores de -15, hasta que encuentren el coeficiente lineal, sumando los productos de las diagonales. Si agotaron todos los posibles factores de -15 intenten con otros factores de 6, repitiendo todas las posibilidades de factorización de -15. Si después de todos los intentos, no encuentran el coeficiente lineal, ¿qué podrían concluir?

A continuación se muestran tres intentos fallidos, al no encontrar el coeficiente lineal 1, del total de las 16 opciones

$$\begin{array}{|cc|}\hline 1 & -5 \\ 6 & 3 \\ \hline \multicolumn{1}{c}{6} & \multicolumn{1}{c}{-15}\end{array}\ 3 - 30 = -27 \qquad \begin{array}{|cc|}\hline 1 & 3 \\ 6 & -5 \\ \hline \multicolumn{1}{c}{6} & \multicolumn{1}{c}{-15}\end{array}\ -5 + 18 = 13 \qquad \begin{array}{|cc|}\hline 2 & -15 \\ 3 & 1 \\ \hline \multicolumn{1}{c}{6} & \multicolumn{1}{c}{-15}\end{array}\ 2 - 45 = -43$$

Las 16 opciones son:

$$\begin{array}{|cc|}\hline 1 & 1 \\ 6 & -15 \\ \hline\end{array}\quad \begin{array}{|cc|}\hline 1 & -1 \\ 6 & 15 \\ \hline\end{array}\quad \begin{array}{|cc|}\hline 1 & -3 \\ 6 & 5 \\ \hline\end{array}\quad \begin{array}{|cc|}\hline 1 & 3 \\ 6 & -5 \\ \hline\end{array}\quad \begin{array}{|cc|}\hline 1 & 5 \\ 6 & -3 \\ \hline\end{array}\quad \begin{array}{|cc|}\hline 1 & 15 \\ 6 & -1 \\ \hline\end{array}$$

$$\begin{array}{|cc|}\hline 1 & -15 \\ 6 & 1 \\ \hline\end{array}\quad \begin{array}{|cc|}\hline 1 & -5 \\ 6 & 3 \\ \hline\end{array}\quad \begin{array}{|cc|}\hline 2 & 1 \\ 3 & -15 \\ \hline\end{array}\quad \begin{array}{|cc|}\hline 2 & -1 \\ 3 & 15 \\ \hline\end{array}\quad \begin{array}{|cc|}\hline 2 & -3 \\ 3 & 5 \\ \hline\end{array}\quad \begin{array}{|cc|}\hline 2 & 5 \\ 3 & -3 \\ \hline\end{array}$$

$$\begin{array}{|cc|}\hline 2 & 3 \\ 3 & -5 \\ \hline\end{array}\quad \begin{array}{|cc|}\hline 2 & -5 \\ 3 & 3 \\ \hline\end{array}\quad \begin{array}{|cc|}\hline 2 & 15 \\ 3 & -1 \\ \hline\end{array}\quad \begin{array}{|cc|}\hline 2 & -15 \\ 3 & 1 \\ \hline\end{array}$$

¿Cuál de ellas es la que permite obtener la factorización de la ecuación $6x^2 + x - 15 = 0$?

5. Por último, escriban la ecuación en forma factorizada y resuelvan dos ecuaciones lineales, igualando a cero cada uno de los factores. Las soluciones de la ecuación son __________ o __________.

¿Es factorizable?

Responde las siguientes preguntas y averigua si la ecuación $2x^2 + 7x + 3 = 0$ es o no factorizable.

a) ¿De cuántas formas puede factorizarse el coeficiente principal 2?

b) ¿De cuántas formas puede factorizarse el término independiente 3?

c) Escribe debajo de cada arreglo la suma del producto de sus diagonales.

$$\begin{array}{|cc|}\hline 1 & 1 \\ 2 & 3 \\ \hline\end{array}\quad \begin{array}{|cc|}\hline 1 & 3 \\ 2 & 1 \\ \hline\end{array}\quad \begin{array}{|cc|}\hline 2 & 1 \\ 1 & 3 \\ \hline\end{array}\quad \begin{array}{|cc|}\hline 2 & 3 \\ 1 & 1 \\ \hline\end{array}$$

$$\boxed{}\quad \boxed{}\quad \boxed{}\quad \boxed{}$$

d) Escribe las dos formas factorizadas que se desprenden después de ver los resultados colocados en las casillas.

e) ¿Es necesario considerar el orden inverso en los números de la izquierda?, ¿por qué?

f) Usa las ideas anteriores para factorizar y resolver las siguientes ecuaciones.

- $3x^2 + 8x + 4 = 0$
- $4x^2 + 16x - 20 = 0$
- $5x^2 + 17x + 6 = 0$
- $10x^2 - x - 3 = 0$
- $2x^2 + 11x + 14 = 0$
- $-3x^2 - 5x + 12 = 0$

g) Intenta factorizar las siguientes ecuaciones.

- $2x^2 + 8x + 4 = 0$
- $-x^2 + 3x + 1 = 0$
- $5x^2 + 8x - 3 = 0$

Lean las siguientes preguntas, discutan en torno a ellas y respóndanlas.

a) ¿Cómo podrían asegurar que la ecuación $2x^2 + 8x + 4 = 0$ no es factorizable? ¿Cúantas posibilidades de factorización analizaron?

b) ¿De cuántas formas puede factorizarse el número 2, que es el coeficiente principal de la ecuación?

c) ¿De cuántas formas puede factorizarse el número 4, que es el término independiente de la ecuación?

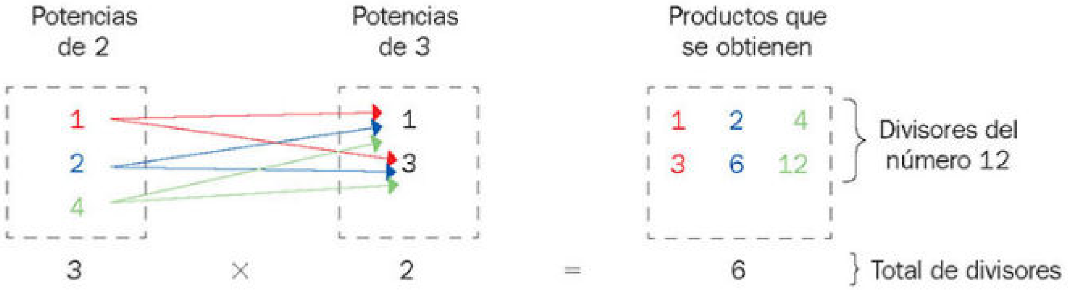
Factorizando enteros

Los números primos son la clave para saber cuántos divisores tiene un número natural. Por ejemplo, si buscas los factores primos del número 12, usando el método de descomposición, ilustrado en la tabla que se muestra a la derecha, vas a encontrar el siguiente resultado:

12	2
6	2
3	3
1	

$$12 = 2^2 \times 3^1$$

Como 2^2 es factor de este número, las potencias $1 = 2^0$, $2 = 2^1$ y $4 = 2^2$ también son factores. De manera similar, $1 = 3^0$ y $3 = 3^1$ son factores de 12. Así, tienes tres potencias de 2 y dos potencias de 3, que puedes combinar para seguir obteniendo divisores. Puedes obtener todos los divisores de 12 si acomodas sus potencias en columnas, una columna por cada factor primo, para combinarlas de todas las formas posibles como lo sugiere el siguiente diagrama:



Como resultado del análisis anterior, se concluye que las posibles formas de ordenar, en pares, todos los factores de 12 es tal como se muestra a continuación:

1	2	3	4	6	12
12	6	4	3	2	1

Realiza la siguiente actividad para que averigües cuántas posibles factorizaciones tiene el número 60.

a) Encuentra los factores primos del número 60, y expresa este número como producto de las potencias de sus factores primos: 60 = __________.

b) Usa las potencias que encontraste para:

- Calcular cuántos divisores tiene 60. Tiene __________ divisores.
- Escribir una lista completa de esos divisores, que son: ____________________.

c) ¿Cuántas columnas usaste para acomodar las potencias de los factores primos? Usé __________ columnas.

d) Escribe la lista de todos los posibles factores de 60; organízalos en pares, es posible que te sobren celdas.

e) ¿Por qué es importante saber cuántos divisores tiene un entero, antes de encontrarlos?

f) ¿De qué manera podrías estar seguro que en tu lista de divisores, no falta ninguno?

g) Compara tus respuestas con las de otros compañeros, si hay diferencias escucha sus argumentos y/o defiende tu respuesta.

Responde las siguientes preguntas para que verifiques si la ecuación cuadrática $3x^2 + 7x - 8 = 0$ es o no factorizable.

a) ¿De cuántas formas puedes factorizar el número 3?

b) ¿De cuántas formas puedes factorizar el número −8?

c) ¿De cuántas formas puedes arreglar dos factores de 3, a y b, con dos factores de 8, c y d, sobre un rectángulo, en la forma $\begin{array}{|cc|}\hline a & c \\ b & d \\ \hline\end{array}$?

d) ¿Hay alguna forma de acomodar en un rectángulo dos factores de 3 y dos factores de 8, de manera que la suma de sus productos cruzados sea 7? Indica cuál.

e) ¿Es factorizable la ecuación $3x^2 + 7x - 8 = 0$?

f) ¿Qué valores podría tener el coeficiente b, en la ecuación $3x^2 + bx - 8 = 0$, para que esta sea factorizable?

g) Resuelve las siguientes ecuaciones usando factorización.

- $3x^2 + 2x - 8 = 0$
- $3x^2 - 23x - 8 = 0$
- $3x^2 + 10x - 8 = 0$

Bloque 2

El procedimiento anterior se puede justificar de la siguiente manera: Factorizar una expresión cuadrática es aplicar la propiedad distributiva del producto de dos binomios, pero en sentido contrario, es decir, a partir de una expresión desarrollada se obtiene una expresión factorizada. Si la expresión cuadrática desarrollada tiene la forma general $Ax^2 + Bx + C$ y la expresión factorizada es $(ax + b)(cx + d)$, por comparación puede verse la relación que hay entre los coeficientes a, b, c, d y A, B, C. En efecto, como:

$$(ax + b)(cx + d) = (ac)x^2 + (ad + bc)x + (bd) = Ax^2 + Bx + C$$

Resulta que:

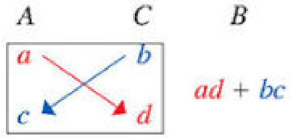
$A = ac$, $B = ad + bc$ y $C = bd$. Si se multiplican los coeficientes extremos de la expresión desarrollada se obtiene:

$$AC = (ac)(bd) = (ad)(bc)$$

Pero, por otro lado, el coeficiente medio es:

$$B = ad + bc$$

En forma gráfica, esta relación puede representarse con la siguiente figura:



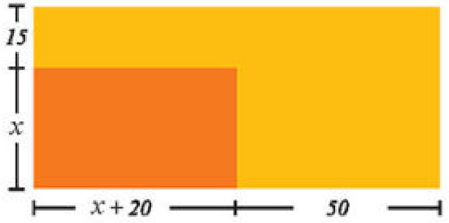
Por ejemplo, ya habías analizado la expresión $5x^2 + 8x - 3$ y te diste cuenta de que no es factorizable. Así, analizaste los cuatro posibles arreglos, con la suma de sus productos cruzados, mostrados debajo de cada arreglo:

1	1	1	−1	1	3	1	−3
5	−3	5	3	5	−1	5	1
− 3 + 5 = 2		3 − 5 = − 2		−1 + 15 = 14		1 − 15 = −14	

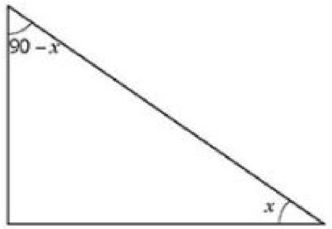
Como ninguno de los productos cruzados es 8, se concluye que la expresión no es factorizable.

Analiza y resuelve los siguientes problemas.

1. La suma de dos números es 13 y la suma de sus cuadrados es 89. ¿Cuáles son esos números?
2. Cuando Mariana le preguntó a Juan su edad, él le respondió de esta manera: "4 veces el cuadrado de la edad de mi hermano da 676 y yo soy 5 años mayor que él". ¿Cuántos años tiene Juan?
3. En una secuencia de cinco enteros consecutivos, el producto del más chico con el más grande da 780 ¿Cuáles son esos números?
4. Un campesino sembró maíz en un terreno rectangular 20 m más largo que ancho. Al día siguiente triplicó el área sembrada aumentando 15 m al ancho y 50 m al largo del terreno. ¿Cuál fue el área total sembrada y cuáles son las dimensiones del terreno sembrado el segundo día?



5. El producto de los ángulos internos agudos de un triángulo rectángulo es 1625. ¿Cuánto miden esos ángulos?



6. La altura h que alcanza un cuerpo sujeto a la ley de la gravedad está gobernada por la siguiente ecuación:

$$h = h_0 + v_0 t - 5t^2$$

En la que v_0 es la velocidad de salida en metros por segundo; h_0 es la altura inicial en metros y t el tiempo en segundos. Con base en esa información imagina que un proyectil lanzado desde el piso hacia arriba, con una velocidad inicial de 50 m/s alcanzó una altura de 105 m. Ahora responde lo que se solicita.

a) ¿En cuánto tiempo lo hizo?
b) ¿En otro momento tuvo esa misma altura? Justifica tu respuesta.
c) ¿La altura máxima que alcanzó fue la de 105 m?

Ecuación cuadrática

Escribe un resumen que te sirva para recordar cuál es la forma estándar de una ecuación cuadrática en general. Menciona algunos casos particulares que la hacen fácil de resolver y ejemplifica cada uno de esos casos.

Factorización de expresiones cuadráticas

Escribe un resumen con el que puedas recordar cómo se factoriza cada una de las expresiones que aparecen a continuación:

- $Ax^2 + Bx$, para cualesquiera valores de A y B.
- $x^2 + Bx + C$, explicando cómo deben relacionarse B y C para que sea posible.
- $Ax^2 + Bx + C$, explicando cómo deben relacionarse A, B y C para que sea posible.

Ilustra cada caso con un ejemplo creado por ti.

Solución de ecuaciones cuadráticas por factorización

Escribe un resumen en el que menciones de qué manera se puede resolver una ecuación cuadrática de la forma $Ax^2 + Bx + C = 0$, cuando es posible factorizar la expresión del lado izquierdo.

Ilústralo con un par de ejemplos de tu invención.

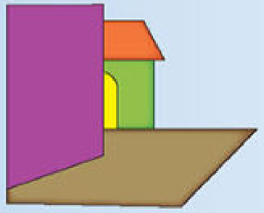
Figuras y cuerpos

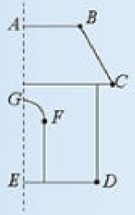
Análisis de las propiedades de la rotación y de la traslación de figuras

Reactivando el saber

Lee la siguiente situación problemática y responde lo que se solicita.

Imagina que vas caminando por la calle y a lo lejos ves lo que parece ser una casa, pero una pared en la esquina no te permite que la veas completa. Cuando llegas a tu casa haces un dibujo para ilustrar lo que viste y obtienes una imagen simplificada, como se muestra a continuación.





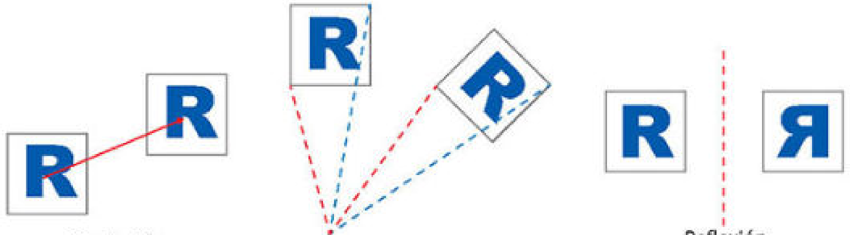
Como no pudiste ver la casa completa, le colocas etiquetas a tu dibujo tratando de reconstruirla y no te queda más remedio que imaginar que la parte oculta es el reflejo de la parte visible. Si los puntos de la imagen reflejada los denominaras A', B', C', etcétera. entonces, ¿cómo sería la imagen oculta?

Para averiguarlo, responde las siguientes preguntas.

1. ¿Cómo será la distancia entre A y B', en relación con la distancia entre A y B?
2. ¿Cómo será el ángulo B', con respecto al ángulo B?
3. ¿Qué forma tendrá la curva FGF'?
4. ¿Cómo será el ángulo AED' en comparación con el ángulo AED?
5. ¿La línea completa BAB' se verá quebrada o recta? ¿Por qué?
6. ¿Cuánto medirá el ángulo GAB'?
7. ¿Cuál será el ancho de la figura completa, comparado con el de la figura que trazaste?
8. Aparte de la reflexión sobre un eje, marca con una R aquellas que no alteren las distancias ni los ángulos.
   a) Rotación (girar los objetos) .... (   )
   b) Homotecia (ampliar o reducir los objetos) .... (   )
   c) Traslación (cambiar de lugar los objetos) .... (   )
   d) Reflexión (voltear los objetos) .... (   )

La letra *R* obedece a que ese tipo de transformaciones, las que no alteran distancias y por lo tanto tampoco ángulos, se llaman *transformaciones rígidas*.

Una *transformación geométrica* es una regla que a cada punto P de una figura le asocia de manera infalible y única, otro punto P' de otra. En la siguiente imagen puedes ver algunas de estas transformaciones a manera de ejemplo:



Bloque 2

Construyendo Matemáticas

Crea un sello

Realiza la siguiente actividad, para ello reúne los materiales que se especifican a continuación.

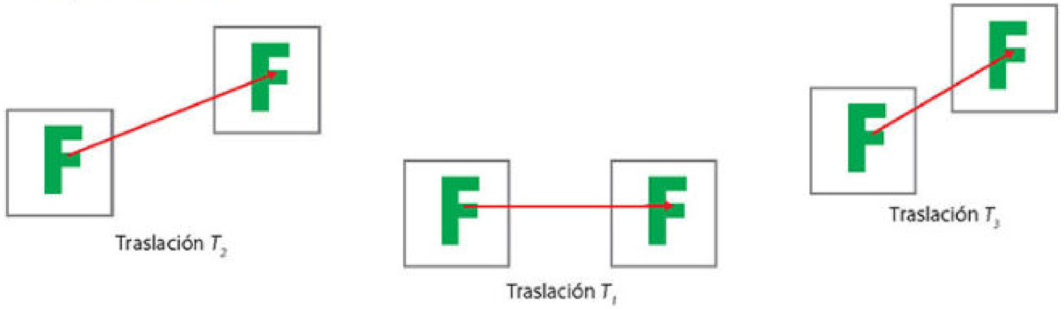
Material

- Una goma blanca y nueva para borrar
- Una gubia o un cúter
- Un plumón de punta fina
- Un plumón de punta gruesa

1. Con el plumón de punta delgada realiza un trazo o dibujo sobre la superficie de la goma, es importante que tomes en cuenta que al voltear esta superficie boca abajo para imprimir tu diseño, éste quedará “volteado”. Una de las transformaciones rígidas que acabamos de mencionar te ayudará a resolver este problema, ¿cuál es?
2. Corta con la gubia o cúter el contorno del dibujo y rebaja la goma removiendo aproximadamente 2 mm de profundidad, dejando solamente el trazo o dibujo en relieve.
3. Para imprimir, sólo tienes que entintar las letras con el plumón de punta gruesa y presionar la cara grabada contra una superficie plana.

Entinta tu sello y haz dos impresiones en el espacio que aparece a continuación. ¿Qué debes tomar en cuenta para que la segunda imagen sea una traslación de la primera?

En la siguiente imagen se ejemplifican tres traslaciones. Obsérvala y después responde lo que se solicita.



a) ¿En qué se parecen y en que son diferentes las traslaciones 1 y 3?

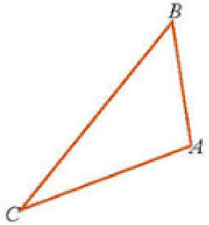
b) ¿En qué se parecen y en qué son diferentes las traslaciones 1 y 2?

c) ¿Tienen alguna similitud las traslaciones 2 y 3?, ¿cuál?

d) ¿Podrías pensar que una traslación queda completamente definida si se conoce el vector que empieza en P y termina en P', o depende también de la forma y tamaño de los objetos que se trasladan?

e) Aplica esas traslaciones a los objetos que aparecen a continuación.

Traslada el triángulo ABC desplazándolo a una distancia de 4 cm con un ángulo de 10° en sentido opuesto al movimiento de las manecillas del reloj, llama a las imágenes de los vértices A', B' y C' según corresponda.

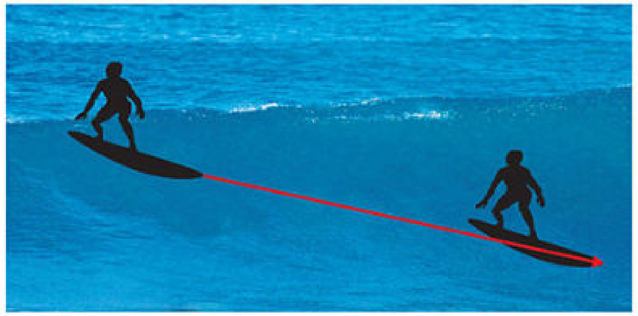


1. Compara el lado AB con el lado $A'B'$.
   a) ¿Cómo son sus direcciones?
   b) ¿Cómo son sus longitudes?
   c) Compara los otros dos lados del triángulo original con sus correspondientes en el triángulo trasladado. ¿Qué puedes concluir al respecto?

2. Compara el ángulo ABC con el ángulo $A'B'C'$.
   a) ¿Cómo son entre sí?
   b) Compara los otros dos ángulos del triángulo original con sus correspondientes en el triángulo trasladado, ¿qué puedes concluir al respecto?
3. ¿Qué le hizo la traslación a las medidas de la figura original? ¿A qué se debe esto?

Realiza las siguientes actividades.

1. Observa la traslación que se muestra a continuación y descríbela con tus propias palabras como si tuvieras que darle instrucciones a alguien.



2. Observa la traslación que se le aplicó a los pájaros y reprodúcela con el águila.

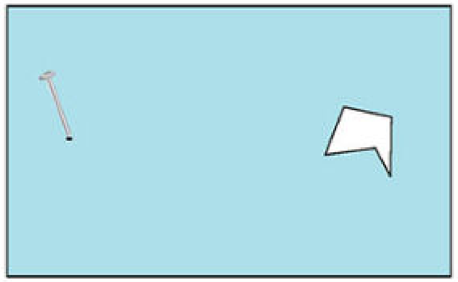
3. A partir de las actividades realizadas hasta ahora, construye tu propia definición de traslación:

____

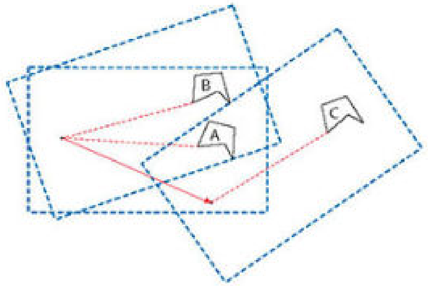
____

Realiza las siguientes actividades y responde a las preguntas.

1. En una tarjeta traza una ventana que tenga alguna forma sencilla; recórtala con un cúter y marca un punto para que lo atravieses con un alfiler, tal como se muestra en la imagen de la derecha.



2. Coloca la tarjeta sobre una hoja blanca encima de una superficie de cartón y clava el alfiler en el punto que tiene la tarjeta. Traza la figura que recortaste con el cúter y encima de ésta escribe la letra A.
3. Sin sacar el alfiler, gira un poco la tarjeta, hasta que desaparezca de la ventana la figura A, y en esa nueva posición vuelve a trazar la figura, pero ahora escribe la letra B.
4. Clava la tarjeta en un punto diferente de la hoja blanca. En el lugar en el que quede la ventana, traza una figura C.



Palabra Mu

centro de giro. Punto sobre el que se hace una rotación.

vector de desplazamiento. Vector que indica la traslación de una figura.

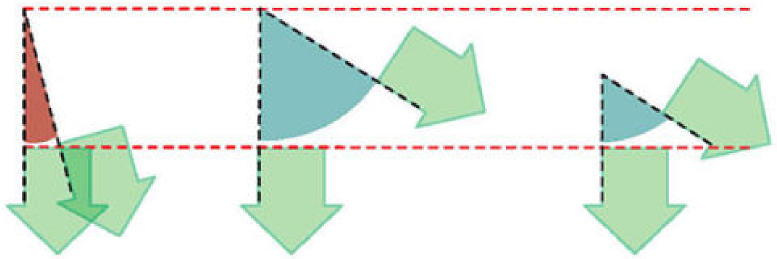
a) ¿Es la figura B una rotación o una traslación de A? Si es rotación, ¿cuál es el **centro de giro**?; si es traslación, ¿cuál es el **vector de desplazamiento**?

b) ¿Es C una rotación o una traslación de A? Si es rotación, ¿cuál es el centro de giro?; si es traslación, ¿cuál es el vector de desplazamiento?

c) Alguna de las figuras B o C, ¿es únicamente una traslación de A? Profundiza en tu respuesta.

d) Cualesquiera que hayan sido tus respuestas a las preguntas anteriores, ¿son B y C el resultado de una transformación rígida de A?, ¿por qué?

Una rotación gira un conjunto de puntos, observa las siguientes rotaciones aplicadas a la figura verde.



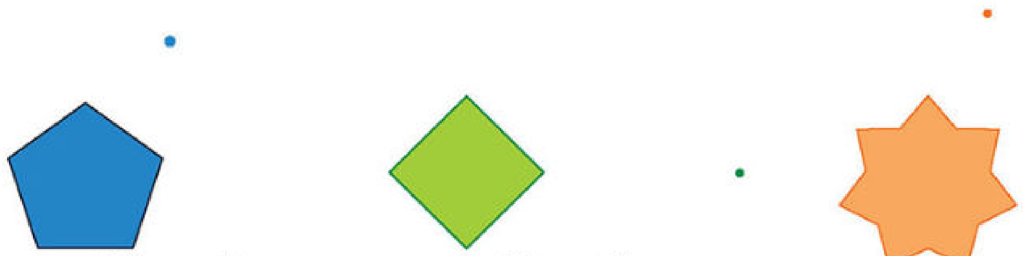
Rotación R_1 Rotación R_2 Rotación R_3

Observa las tres rotaciones anteriores, compáralas y responde lo que se solicita a continuación.

a) ¿En qué se parecen y en qué son distintas las rotaciones R_1 y R_2?
b) ¿En qué se parecen y en qué son distintas las rotaciones R_2 y R_3?
c) ¿En qué se parecen y en qué son distintas las rotaciones R_1 y R_3?
d) ¿Qué elementos necesitas para definir una rotación?

Realiza la siguiente actividad.

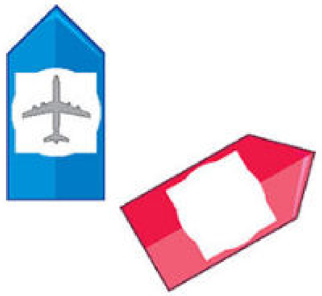
En las siguientes figuras aplica la rotación que se solicita; usa como centro de rotación el punto que está en cada caso.



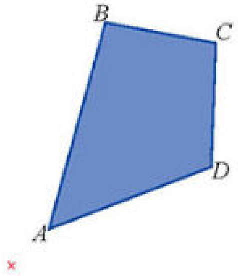
144° en sentido opuesto al reloj 60° en sentido del reloj 180°

Analiza las siguientes problemáticas y resuélvelas.

1. Imagina que eres un ingeniero y debes decirle al operador de una grúa donde colocarse y que movimientos hacer para llevar un avión de un embarque a otro. Señala el centro de rotación y el ángulo que debe girar la grúa.

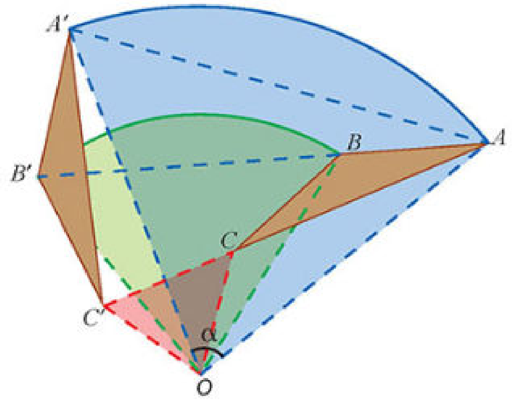


2. Rota el cuadrilátero $ABCD$ con un ángulo de 10° en sentido del movimiento de las manecillas del reloj, con centro de rotación en el punto señalado; nombra a los vértices de la figura A', B', C' y D' según corresponda.



3. Compara los lados del cuadrilátero original con los del resultado de la rotación.
   a) ¿Qué puedes concluir?
   b) ¿Por qué se dice que las rotaciones son transformaciones rígidas?

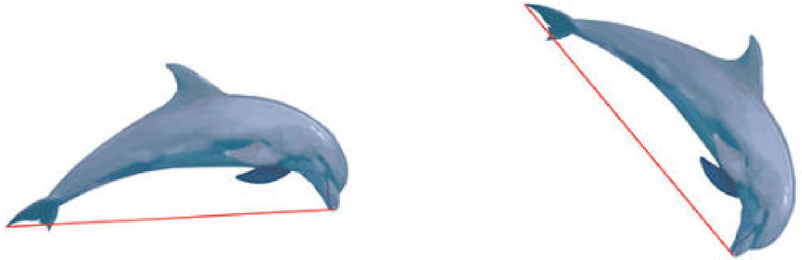
Si a un triángulo ABC se le aplica una rotación con centro O y un determinado ángulo α , se obtiene un triángulo $A'B'C'$ y se tienen las siguientes relaciones entre las distancias $\overline{AO} = \overline{A'O}$, $\overline{BO} = \overline{B'O}$, $\overline{CO} = \overline{C'O}$; entonces se forman tres triángulos isósceles AOA', BOB' y COC'.



Con base en la aseveración anterior, encuentra el centro y el ángulo de una rotación.

Supón que tienes dos figuras, en donde una es rotación de la otra, ¿cómo puedes encontrar el centro O y el ángulo α ?
Inténtalo con las dos rotaciones que se presentan a continuación.

Observa la imagen; encuentra O y α para esta situación. ¿Te servirán las líneas rojas?, toma en cuenta que los puntos correspondientes de ambas figuras deben ser puntos sobre círculos concéntricos.

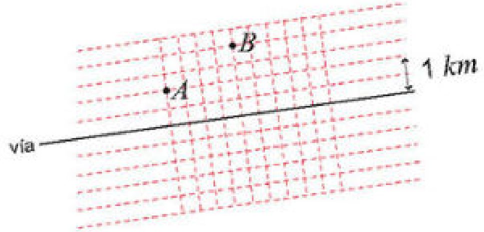


Para saber más sobre movimientos en el plano consulta en tu Biblioteca de Aula o Escolar: *Una ventana a las formas* de Carlos Bosch y Claudia Gómez, 2003.

Un concepto importante para entender las reflexiones es el de “distancia entre un punto y una recta”.

Analicen la siguiente situación y respondan lo que se solicita.

Dos grupos de excursionistas acamparon cerca de la vía del tren. Cada grupo buscó un lugar adecuado para instalar su campamento, tal como se observa en la siguiente imagen:



a) ¿Cuál de los dos grupos quedó más cerca de la vía?

b) ¿A qué distancia de la vía quedó el grupo A?

c) ¿A qué distancia de la vía quedó el grupo B?

d) ¿Cuál es la distancia entre el grupo A y el B?

e) Marquen sobre la vía del tren el punto más cercano al grupo A y el más cercano al B. Denomínenlos P y Q, respectivamente.

f) En general, ¿cómo se localiza sobre una recta el punto más cercano a un punto dado fuera de la recta?

g) ¿Cómo se mide la distancia de un punto a una recta?

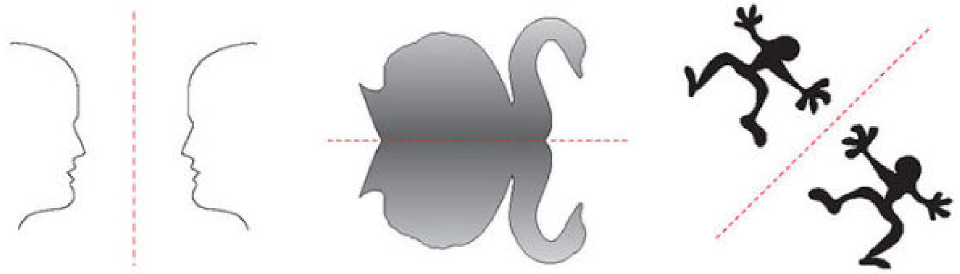
h) Si la vía es un eje de simetría, marquen sobre la figura los puntos simétricos a A y B. Llámenlos A' y B', respectivamente.

i) ¿Cuál es la distancia entre A' y B'?

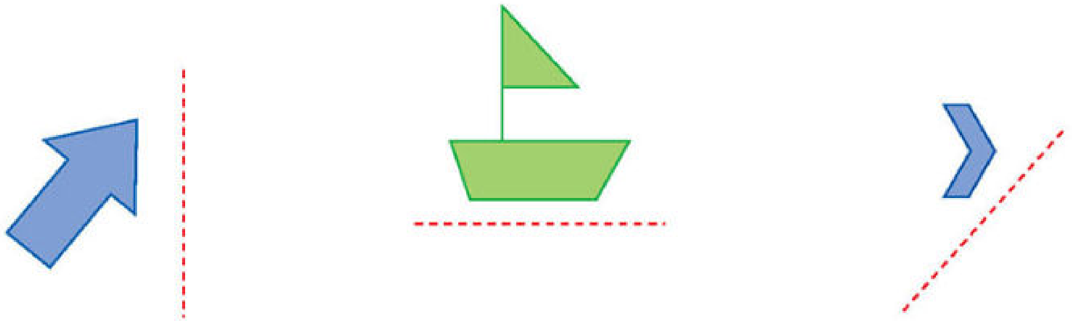
j) ¿Es la reflexión una transformación rígida?, ¿por qué?

Lee el siguiente argumento y realiza lo que se solicita.

Es posible reflejar un conjunto de puntos respecto a una recta, ésta recibe el nombre de *eje de reflexión*. Observa las reflexiones que aparecen a continuación, analiza los planteamientos y responde las preguntas.



1. Asume que F' es la imagen reflejada de F, respecto a una recta L.
   a) ¿Cómo son las distancias en F', comparadas con las distancias en F?
   b) ¿Cómo son los ángulos en F', comparados con los ángulos en F?
   c) ¿Cómo son las distancias de los puntos de F' a la recta L respecto a las distancias de los puntos correspondientes en F a la recta L?
2. Refleja las figuras de la siguiente imagen con relación a las rectas que se presentan.



3. ¿Es posible crear una reflexión usando únicamente tu sello? Compruébalo realizando lo que se indica a continuación.
   a) Entinta el sello que realizaste con anterioridad y haz una impresión en una hoja blanca. Verifica si es posible imprimir una copia de manera que se obtenga una reflexión de la figura original. ¿Se puede? ¿Bajo qué condiciones? En caso de que no sea posible, explica por qué.

Observa las imágenes y encuentra la o las transformaciones adecuadas para que se pueda realizar lo que se indica.

a) Colocarle el precio en la etiqueta
b) Situar el rostro en el espejo
c) Llevar el canario a su jaula

Propiedades de las transformaciones rígidas

Las transformaciones rígidas son aquellas que no cambian las distancias entre los puntos. Si a una terna de puntos A, B, C le aplicamos una transformación rígida cualquiera, obtendremos una nueva terna A', B', C' que no altera las distancias; es decir, que $\overline{A'B'} = \overline{AB}$, $\overline{B'C'} = \overline{BC}$ y $\overline{C'A'} = \overline{CA}$, donde la línea sobre las letras representa el segmento que inicia en la primera y termina en la segunda de ellas. En consecuencia, tampoco se alteran los ángulos, pues $\angle A'B'C' = \angle ABC$, donde el símbolo $\angle$ representa "la medida del ángulo". En general, ¿qué conservan las transformaciones rígidas? Las siguientes son transformaciones rígidas:

Traslaciones

Son transformaciones rígidas que consisten en arrastrar un conjunto de puntos, no altera la dirección ni el sentido de los segmentos formados por parejas de puntos. Quedan completamente definidas por una flecha (en ocasiones llamada directriz), que se coloca en cada punto P y señala el punto P' al que será enviado.

Rotaciones

Son transformaciones rígidas que se obtienen a partir de un centro de rotación O y un ángulo α. Para cada punto P del conjunto original se traza una circunferencia con centro en O y radio $\overline{OP}$, sobre la circunferencia se localiza un punto P' de manera que $\angle POP' = \alpha$.

Reflexiones

Son transformaciones rígidas que se obtienen a partir de una recta L. Para cada punto P del conjunto original se traza una perpendicular a L que pase por P y que corte a L en un punto O; se localiza el punto P' que se encuentra sobre dicha perpendicular, conservando la dirección del segmento PO pero cambiando el sentido.

¿Hay otras transformaciones rígidas?

Realicen la siguiente actividad.

¿Será posible crear transformaciones rígidas que no sean traslaciones, rotaciones o reflexiones? Descúbranlo a continuación.

1. Observen las siguientes transformaciones y discutan si se puede llegar a F' partiendo desde F, aplicando sólo una de las transformaciones que hemos estudiado en este tema.
2. Respondan las preguntas, en caso de que identifiquen alguna de las tres transformaciones, localicen y tracen su directriz, su centro de rotación y ángulo, o bien su eje de reflexión, según sea el caso.

   a) ¿El ejemplo 1 corresponde a una traslación, una rotación, una reflexión, o se trata de otra transformación rígida?
   b) ¿El ejemplo 2 corresponde a una traslación, una rotación, una reflexión, o se trata de otra transformación rígida?
   c) Si componen una transformación combinando una rotación con una reflexión y/o con una traslación, ¿el resultado será también una transformación rígida? ¿Por qué?
   d) Propongan algunos diseños combinando distintas transformaciones rígidas.

Construcción de diseños que combinan la simetría axial y central, la rotación y la traslación de figuras

Reactivando el saber

Responde lo que se solicita

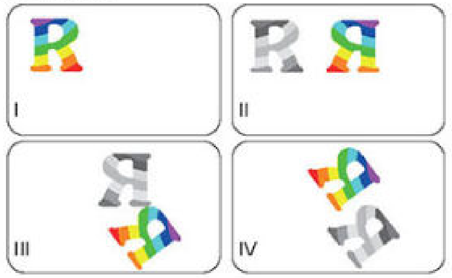
En secuencias de estudio anteriores, te enfrentaste a problemáticas que implican reconocer figuras semejantes y figuras congruentes. ¿Te has preguntado la relación que hay entre las transformaciones geométricas y estos conceptos? Justifica o profundiza en tu respuesta.

En la siguiente secuencia ordenada se muestra una imagen antes de ser transformada, seguida por imágenes que corresponden a una transformación rígida de la imagen original.

Realiza la siguiente actividad.

1. Identifica qué transformación se aplicó en II, III y IV, y escribe lo siguiente dentro de cada recuadro:

   Rot si se trata de una rotación (que también se conoce como simetría central cuando es de 180°), **Tra** si es una traslación, o **Ref** si decides que es una reflexión conocida también como simetría axial.



Donde haya una traslación, traza el vector que le corresponda; donde veas una rotación, ubica y marca el centro y el ángulo; y donde veas una reflexión, traza el eje de simetría.

2. En la siguiente figura puedes comparar la imagen original (I), con la final (IV) que es el resultado de tres transformaciones rígidas.

   a) ¿Consideras que la transformación resultante también es rígida? Justifica tu respuesta.
   b) ¿Se trata de una traslación?, ¿por qué?
   c) ¿Es una rotación?, ¿por qué?
   d) ¿Corresponde a una reflexión?, ¿por qué?

Discutan con sus compañeros los resultados de la actividad anterior y respondan las siguientes preguntas, para que posteriormente escriban una conclusión al respecto.

1. Cuando se crea una transformación nueva combinando rotaciones con reflexiones y/o traslaciones. ¿La transformación creada sigue siendo rígida?, ¿por qué?
2. ¿Cualquier transformación rígida se puede realizar únicamente empleando rotaciones, reflexiones y/o traslaciones?, ¿por qué?
3. En el cuadro V de la actividad anterior se ven dos imágenes: la original y la que resulta de tres transformaciones aplicadas secuencialmente en cierto orden. Encuentren otra secuencia de transformaciones para obtener la imagen transformada a partir de la original, debe ser distinta a la secuencia de los cuadros II, III y IV.
   a) Si lo lograron, ¿con cuántas transformaciones rígidas lo hicieron?
   b) ¿Cuáles son esas transformaciones rígidas?
   c) Discutan la pregunta anterior con otros equipos. ¿Alguno logró el resultado con dos transformaciones? ¿Cuáles fueron y en qué orden?
   d) ¿Con esas dos transformaciones, podrían decir, que se puede lograr cualquier transformación rígida? Justifiquen su respuesta.

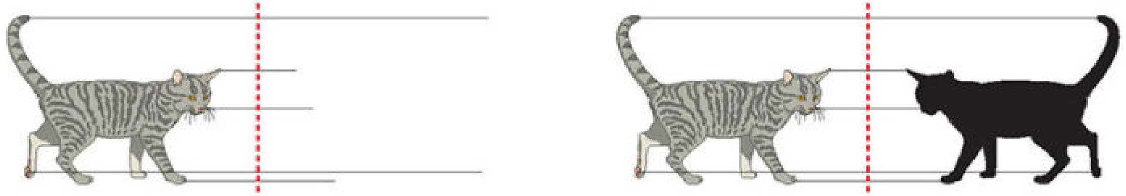
Relaciona con una línea cada transformación con el o los elementos que le corresponden.

Transformación	Elementos
	Centro de giro
Traslación	
	Eje de simetría
Rotación	Ángulo de giro
	No altera distancias
	Vector de desplazamiento
Reflexión	
	No altera ángulos

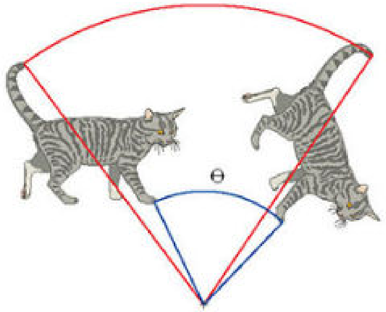
Bloque 2

Transformaciones rígidas

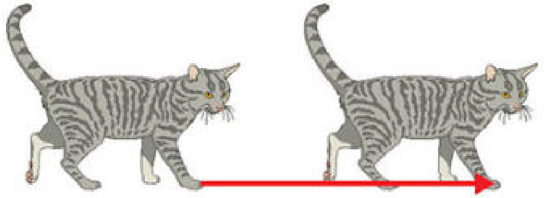
Para reflejar una imagen se requiere un eje. Cada punto de la imagen será proyectado hacia éste, definiendo un segmento de recta perpendicular a dicho eje. Cada uno de estos segmentos debe extenderse al otro lado del eje, otro tanto más de su propia longitud, de tal manera que la imagen reflejada se forme con los puntos que quedan en el extremo opuesto de ese segmento extendido.



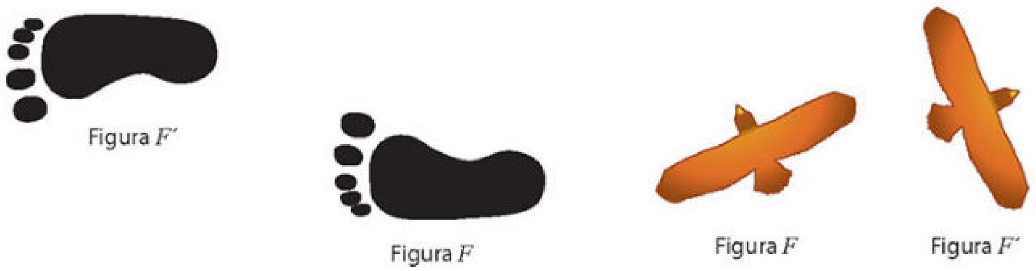
Para rotar una imagen se requiere un centro y un ángulo. Para cada punto de la imagen se indica en él un arco de círculo, cuyo centro es el centro de rotación y su abertura es el ángulo dado; en el otro extremo del arco quedará el punto transformado y la imagen rotada se formará con todos esos puntos transformados.



Para trasladar una imagen basta con llevar todos sus puntos en una misma dirección y distancia, a través de un vector.



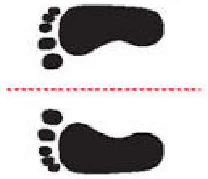
En las siguientes imágenes se ejemplifican transformaciones rígidas.



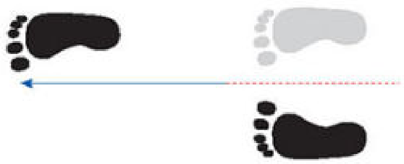
Después de analizar ejemplos como éstos, debiste haber notado que a pesar de ser transformaciones rígidas, ninguna de ellas es una traslación, rotación, o reflexión. De hecho ambos ejemplos son combinaciones de estas tres.

Imagina que caminas por la playa y te detienes un momento, la huella de tu pie izquierdo se vería más o menos así.

Y si estás de pie, la huella de tu pie derecho es una reflexión de ella.



Ahora bien. Si das un paso con el pie derecho trasladándolo hacia adelante, obtendrás lo siguiente.



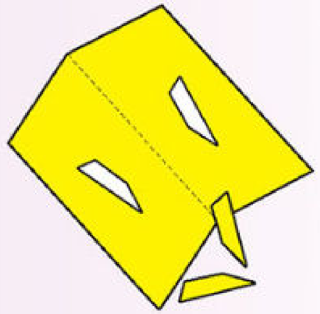
La imagen anterior es una combinación de: a) Una reflexión y b) Una traslación. A esta transformación rígida se le conoce como *deslizamiento*.

Construyendo Matemáticas

Crea un deslizamiento

Realiza la siguiente actividad.

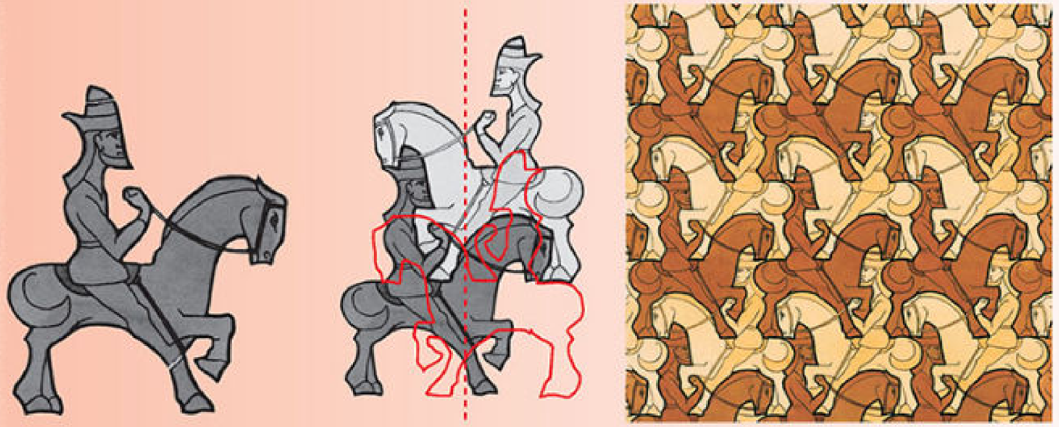
Combina una reflexión y una traslación para crear un deslizamiento en una hoja aparte. Primero traza el eje de reflexión y el vector de traslación sobre ese eje, de modo que el vector sea notorio, al menos en el punto donde inicia y en el punto final, tal como se muestra en la imagen de la derecha.



Para facilitarte la labor, dobla un pedazo de papel, el doblez te servirá como eje de reflexión. Crea un diseño en una de las secciones del papel y recorta ambas partes manteniendo el doblez cerrado; obtendrás dos figuras congruentes, una original y una copia reflejada. Sobre el doblez del papel haz una pequeña perforación. Coloca el papel que tiene las dos ventanas que recortaste, haciendo coincidir el doblez con el eje que trazaste y la perforación con el inicio del vector de traslación, abre el papel y pega una de las figuras en una de las ventanas; después desliza el papel sin dejar de coincidir el doblez con el eje trazado, hasta que la perforación esté sobre la punta del vector. Ahí donde quede, pega la otra figura en el sitio que marca la segunda ventana.

Matemáticas en el pasado

El gran maestro grabador M. C. Escher diseñó esta obra, y mediante deslizamientos y traslaciones logró crear un mosaico muy interesante.

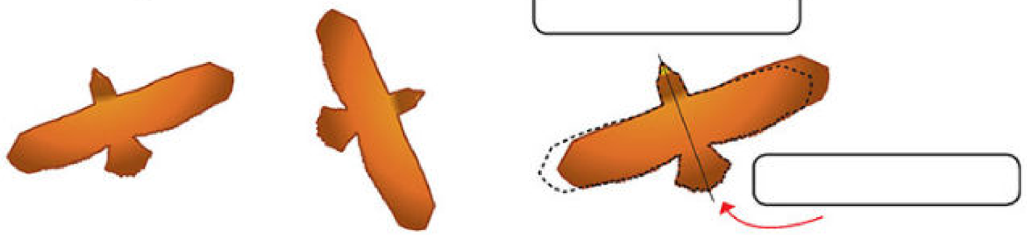


Fuente: Bruno Ernst, *El espejo mágico de M.C. Escher*, 1994.

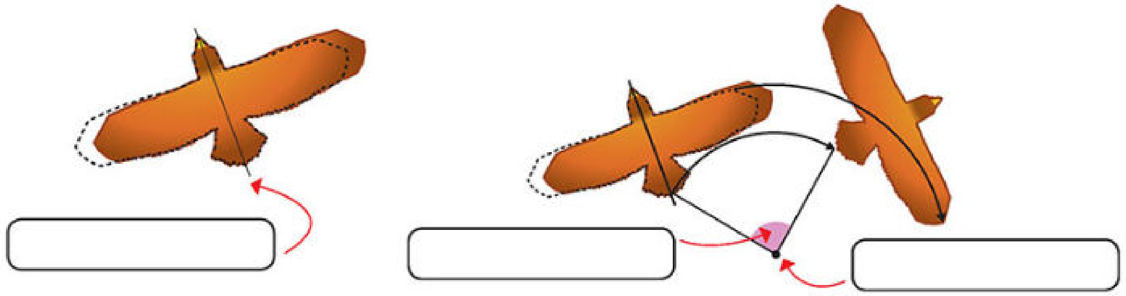
Observa la secuencia de imágenes que aparecen a continuación y reconstruye la transformación. Coloca los nombres de las transformaciones y de sus elementos en los lugares correspondientes.

Imagen transformada

Transformación



Transformación



Construyendo Matemáticas

Diseña un friso y utilízalo para decorar tu cuaderno.

Utiliza lo que sabes sobre transformaciones rígidas, y combina traslaciones, reflexiones y rotaciones para realizar un **friso** como los que aparecen a continuación.

Palabra Mu

friso. Franja que suele pintarse en la parte inferior de las paredes o con motivos de decoración.

Bloque 2

Combina una reflexión con una rotación

Utiliza el siguiente espacio para crear un diseño, refléjalo localizando el eje, y rótalo identificando el centro y el ángulo de rotación.

Combina una rotación con una traslación.

Utiliza el siguiente espacio para crear un diseño, rótalo localizando el centro y el ángulo de rotación, después trasládalo identificando la distancia y dirección.

Para concluir esta secuencia de estudio, realiza lo que se solicita enseguida.

1. Analiza y responde las siguientes preguntas.
   a) ¿Podría decirse que toda transformación rígida es la composición de una reflexión seguida de una rotación?, ¿por qué?
   b) ¿Podría decirse que toda transformación que no altera distancias y por lo tanto tampoco ángulos, no cambia la forma ni el tamaño de los objetos?, ¿por qué?
   c) ¿Podría decirse que dos figuras son congruentes si una de ellas es el resultado de aplicar alguna transformación rígida a la otra?, ¿por qué?
   d) ¿Dos figuras semejantes, también son congruentes? y viceversa, ¿dos figuras congruentes, también son semejantes? Justifica tu respuesta.
   e) ¿Qué transformación debe tomarse en cuenta para hablar de figuras semejantes?
2. Completa el siguiente enunciado:

   Si una figura es transformada en otra, mediante alguna transformación rígida, la figura resultante es ____________________ con la figura original. Si además de una transformación rígida, se aplica una homotecia, la figura resultante es ____________________ a la figura original.

Medida

Análisis de las relaciones entre las áreas de los cuadrados que se construyen sobre los lados de un triángulo rectángulo

Reactivando el saber

Analiza la información y realiza lo que se indica.

En todas las actividades humanas intervienen las matemáticas, así ha ocurrido desde tiempos inmemoriales. Alguna vez te has preguntado ¿cómo le hacen los carpinteros o los albañiles para trazar un ángulo de 90° sólo con una cinta de medir?

Imagina que te encuentras en una situación en la que debes trazar un ángulo recto y lo único que tienes es una cinta métrica. Recuerda que no siempre dispones de una escuadra, un libro, una tabla u otro objeto que contenga un ángulo recto, debes resolver el problema usando únicamente medidas de longitud. Explica cómo resolver este trazo y hazlo en el espacio que aparece a continuación.

Explicación	Trazo

Analicen la siguiente situación y respondan lo que se solicita.

Para construir una barda exactamente perpendicular al piso, unos albañiles utilizan tres tablas y las clavan formando un ángulo recto.

a) ¿Qué medidas consideran que pueden tener las tablas?

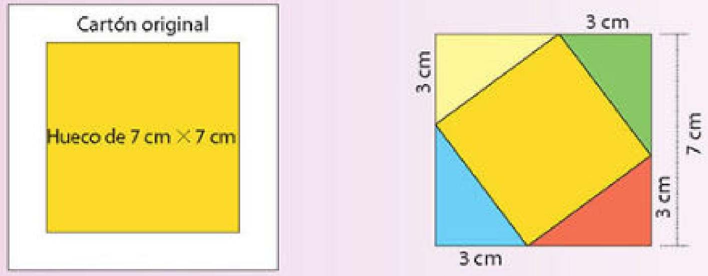
b) Si un albañil coloca tablas con medidas de 45, 27 y 36 cm, formando un triángulo, podrían garantizar que uno de sus ángulos fuera de 90°? Justifiquen su respuesta.

c) ¿Con qué otras medidas podrían formar un triángulo rectángulo?

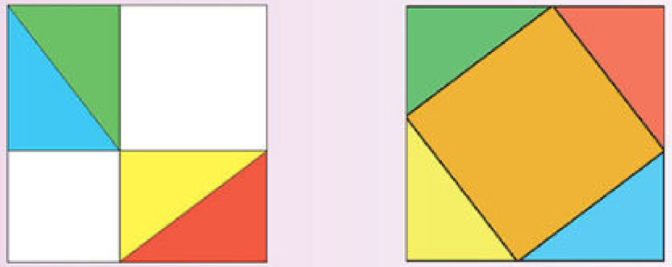
Construyendo Matemáticas

Averigüen qué tan preciso es el siguiente cálculo.

1. Con cualquier tipo de cartón, más o menos rígido como el de una caja, tracen y recorten un cuadrado de 7 cm × 7 cm. Procuren la mayor precisión posible y no corten por completo el cartón, pues debe quedar el hueco del cuadrado.
2. A partir del cuadrado recortado tracen, desde cada esquina y en la misma dirección, líneas de 3 cm; únanlas por medio de diagonales, de tal forma que construyan un nuevo cuadrado y cuatro triángulos rectángulos, tal como se ve en la figura.



3. Recorten del cartón los cuatro triángulos iguales que acaban de trazar.
4. En el hueco que quedó en el cartón acomoden los triángulos de la siguiente forma, y comparen su acomodo con la figura que obtuvieron cuando trazaron los triángulos.



a) ¿Qué relación encuentran entre el área del cuadrado central y las áreas de los cuadrados que aparecieron cuando reacomodaron los triángulos en el hueco?

b) ¿Qué le habría ocurrido al área del cuadrado construido sobre la hipotenusa, si el ángulo recto de cada triángulo hubiera sido un poco menor a 90°?

c) ¿Qué le habría ocurrido al área del cuadrado construido sobre la hipotenusa si el ángulo recto de cada triángulo hubiera sido un poco mayor a 90°?

d) Determinen la longitud de la hipotenusa del triángulo que formaba parte del cuadrado que cortaron originalmente.

e) ¿La relación que se da entre las áreas de los cuadrados, depende únicamente del ángulo de 90° o de las medidas de los lados de los triángulos?

5. ¿Qué ocurriría si los triángulos rectángulos no tuvieran por lados 3 y 4 cm? ¿Se conservaría la relación entre las áreas? Averígüenlo observando las figuras del paso número cuatro.

Responde lo que se solicita.

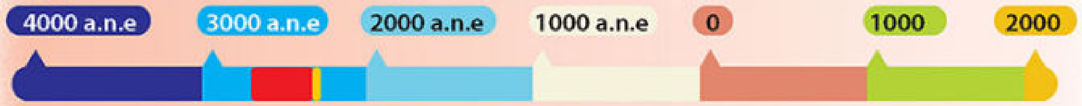
Considerando que en un triángulo rectángulo los lados del ángulo recto se llaman catetos y el lado opuesto a dicho ángulo se llama hipotenusa, completa el siguiente enunciado.

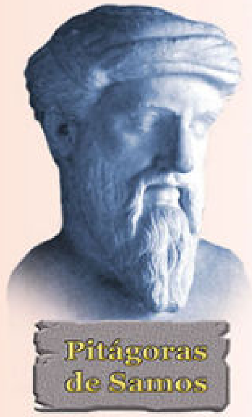
En un triángulo rectángulo, la suma de los cuadrados de ____________________ es igual al cuadrado de ____________________.

El enunciado anterior se conoce como teorema de Pitágoras.

Bloque 2

Matemáticas en el pasado





Se dice que el teorema de Pitágoras fue formulado por los discípulos del matemático y filósofo griego Pitágoras de Samos. Actualmente, se sabe que este teorema ya era conocido en Mesopotamia y en Egipto, aproximadamente unos 2500 años a.n.e.; pero dado que no hay un documento en el que se hable de esa propiedad, no se les puede atribuir a ellos. Los egipcios sólo utilizaban algunas ternas pitagóricas, en particular la terna 3, 4 y 5 que fue usada para la construcción de la Pirámide de Kefrén en el antiguo Egipto, a esta terna se le conocía como el Triángulo Sagrado de los egipcios.

A lo largo de la historia, se han acumulado muchas demostraciones del teorema de Pitágoras y en 1927, el matemático estadounidense Elisha Scott Loomis, en su libro “The Pythagorean Proposition”, presentó 365 demostraciones clasificadas en tres grupos: algebraicas, geométricas y vectoriales.

La aplicación del teorema de Pitágoras es muy práctica cuando los catetos y la hipotenusa tienen valores enteros, por ejemplo, un triángulo cuyos catetos miden 3 y 4 cm con hipotenusa de 5 cm. A cada una de esas ternas numéricas se les llama ternas pitagóricas, en honor a que satisfacen el teorema de Pitágoras.

Observa que si (3, 4, 5) es una terna pitagórica, también lo son (6, 8, 10), (30, 40, 50) y cualquier otra terna que sea múltiplo de la original.

Busca en internet o en libros de tu Biblioteca de Aula o Escolar otras ternas pitagóricas y escríbelas en tu cuaderno, determina cuáles de esas ternas pueden ser de utilidad para construir escuadras, tal como lo hace un carpintero o un albañil.

Fuente: Elisha Loomis, *The Pythagorean Proposition*, 1968.

Explora

Ingresa al siguiente sitio electrónico para que observes algunas formas geométricas y algebraicas que hacen evidente la validez del teorema de Pitágoras:

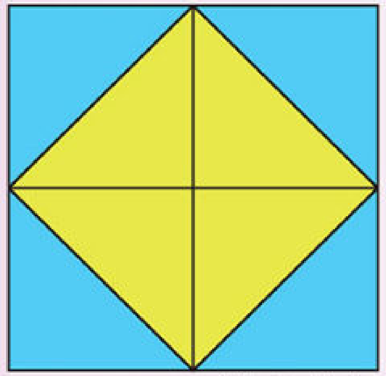
http://roble.pntic.mec.es/jarran2/cabriweb/1triangulos/teoremapitagoras.htm

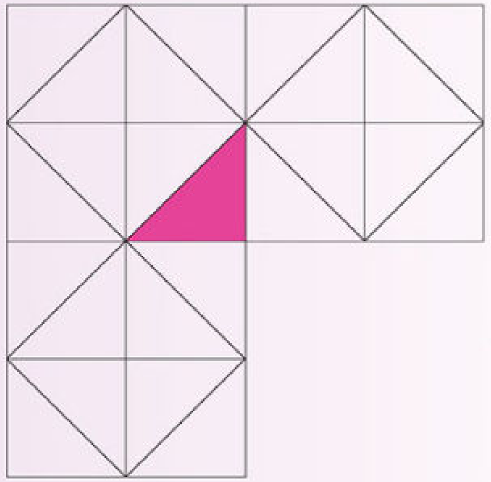
(Consulta: 9 de septiembre de 2014).

Hay cierta clase de triángulos rectángulos en los que es más fácil darse cuenta de la validez del teorema de Pitágoras, por ejemplo, en los triángulos rectángulos, que a la vez son isósceles y pueden obtenerse fácilmente cuando un cuadrado es cortado por la diagonal.

Construyendo Matemáticas

A partir de un triángulo isósceles y de un rectángulo, construyan un rompecabezas como el siguiente, conformado por 8 triángulos iguales.

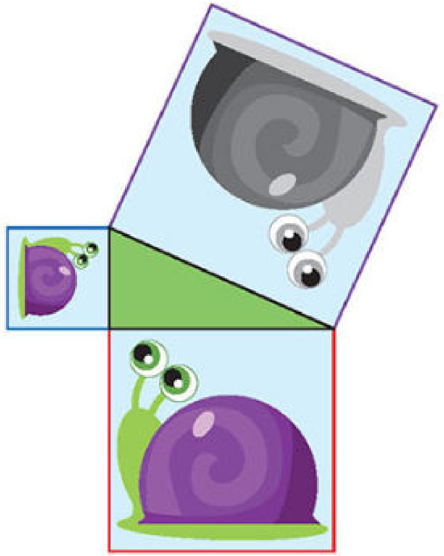

Triángulo original



Intenten usar las 8 piezas del rompecabezas para probar que el teorema de Pitágoras es válido.

a) ¿Tienen suficientes piezas para hacerlo?
   - A partir del triángulo original coloquen dos piezas para cada cateto y cuatro piezas para la hipotenusa, de tal manera que se forme un cuadrado en cada lado del espacio que dejó el triángulo original. Quiten el triángulo original y colóquenlo en el espacio faltante.
   - ¿Se convencen de la validez del teorema en este caso?, ¿por qué?

Analiza y resuelve el siguiente problema.



En el área infantil de un parque acuático hay una jardinera triangular rodeada por tres albercas de forma cuadrada, éstas tienen la misma profundidad y diseño como se muestra en la figura.

a) Si la alberca chica se llena con 8 000 l de agua y la mediana con 15 000 l. ¿Cuántos litros de agua se necesitan para llenar la alberca grande?

b) Si en la alberca pequeña se utilizaron 2.4 l de pintura para renovar el diseño del fondo cuadrangular y para la mediana se emplearon 4.5 l. ¿Cuánta pintura se necesitará para renovar el diseño de la alberca grande?

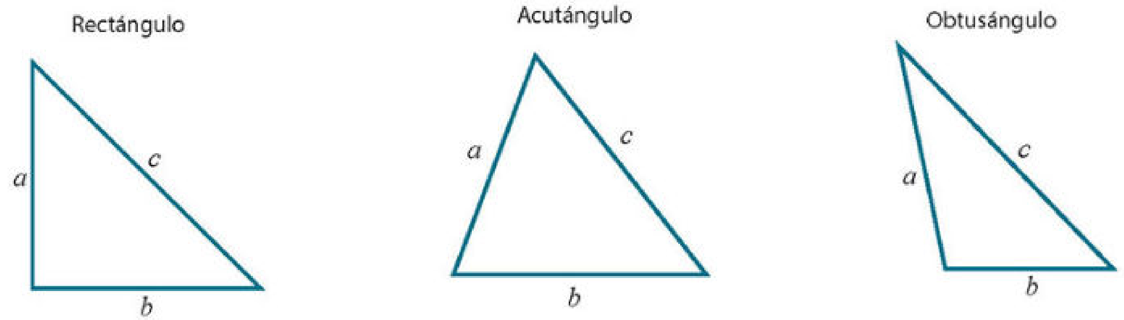
c) Si existe una relación proporcional entre el volumen de agua y el área de la base de la fuente que la contiene ¿es aplicable el teorema de Pitágoras a los volúmenes?, ¿cuál sería la constante de proporcionalidad?

d) Si existe una relación proporcional entre el área de cada figura y el área del cuadrado que la contiene, ¿es aplicable el teorema de Pitágoras sobre las figuras?, ¿cuál es la constante de proporcionalidad?

Ahora que has realizado las actividades anteriores podrás inferir y comprender una de las clasificaciones que se da para los triángulos.

Observa las siguientes figuras y en las casillas, escribe la igualdad o desigualdad, según corresponda a cada tipo de triángulo.

Clasificación de los triángulos

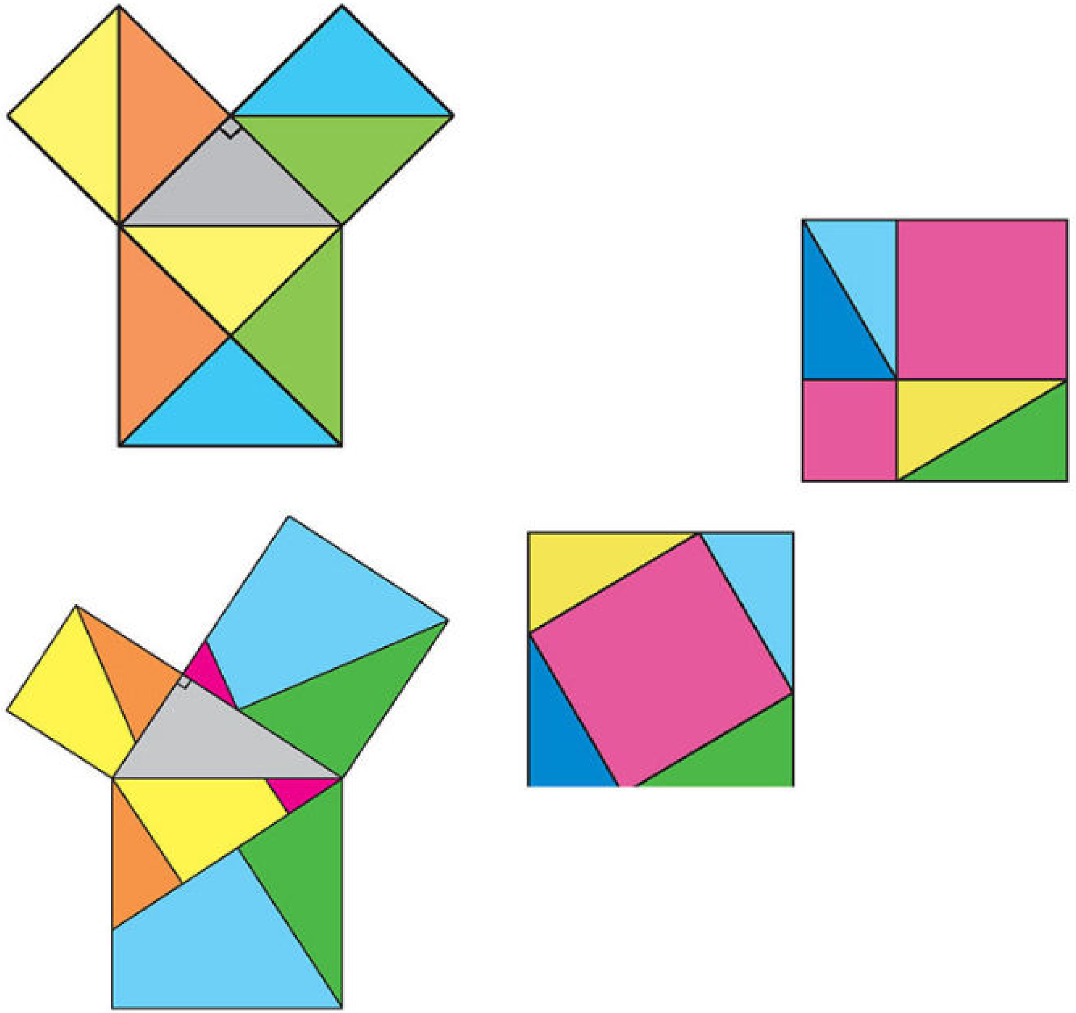


$a^2 + b^2 \square\ c^2$ $a^2 + b^2 \square\ c^2$ $a^2 + b^2 \square\ c^2$

Bloque 2

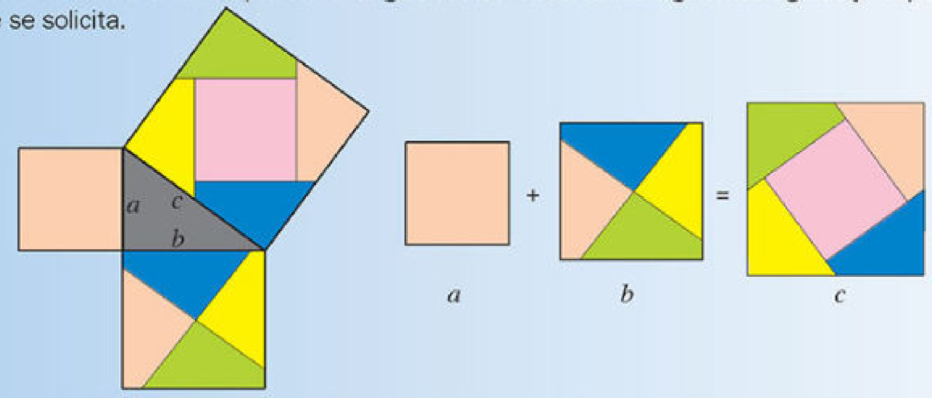
Analiza y resuelve los siguientes problemas.

1. Una cancha de futbol mide 60 m × 90 m. ¿Cuánto mide su diagonal?
2. El tamaño de una pantalla de televisión se expresa en plg y corresponde a la longitud de su diagonal. ¿Cuánto mide la base de una pantalla de 32 plg, si su altura es de 12 plg?
3. En un terreno horizontal, un cable tenso de 15 m de longitud baja desde lo más alto de un poste vertical hasta anclarse en el piso a 9 m de la base de éste. ¿Qué altura tiene el poste?
4. ¿Con qué cálculos te darías cuenta si el ángulo que te proponen las dos escuadras de tu juego de geometría es verdaderamente recto?
5. ¿Cómo podrías saber si el ángulo formado por dos muros de tu casa es agudo, recto u obtuso?
6. Para terminar, observa cómo en las tres figuras que siguen se tiene una evidencia de la validez del teorema de Pitágoras. Justifica este hecho.



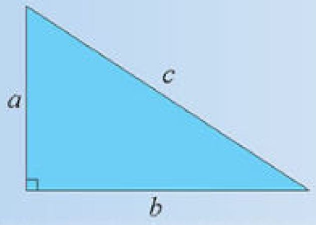
Reactivando el saber

El teorema de Pitágoras es un enunciado geométrico que se cumple para algunos triángulos. En un triángulo rectángulo, ¿cómo se le llaman a los lados que forman el ángulo recto?, ¿cómo se llama el lado opuesto al ángulo recto? Observa las siguientes figuras y responde lo que se solicita.

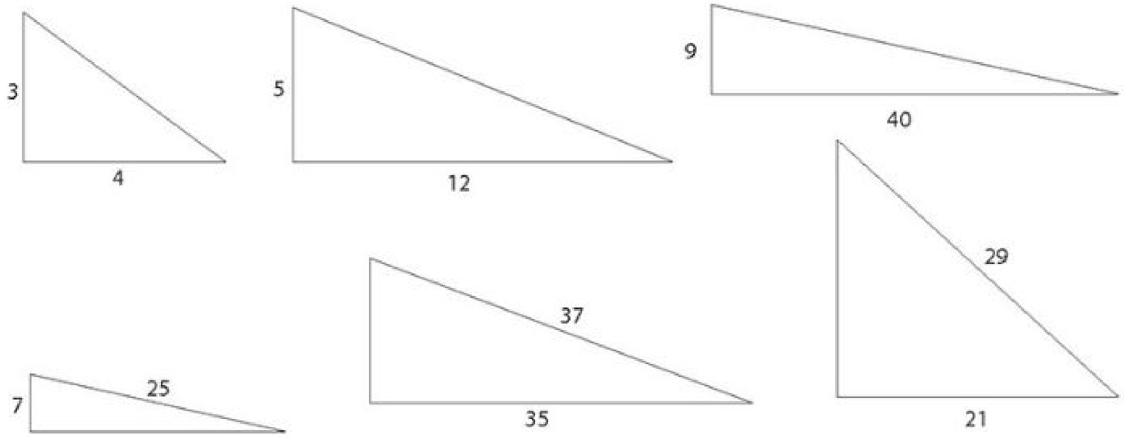


a) ¿Qué característica debe cumplir un triángulo para poder aplicar el teorema?

b) Escribe en el recuadro el enunciado y la fórmula correspondiente al teorema de Pitágoras.

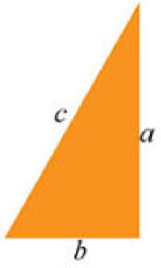


En cada uno de los triángulos rectángulos que aparecen a continuación, calcula el valor del lado desconocido y escríbelo en el lugar que le corresponda.



Bloque 2

Con base en la actividad anterior, escribe tres fórmulas que se desprendan del teorema de Pitágoras, para calcular, a partir de dos lados conocidos, la longitud de cualquiera de los lados de un triángulo rectángulo.

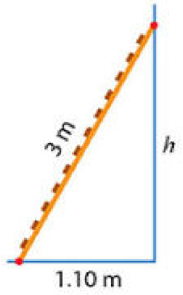


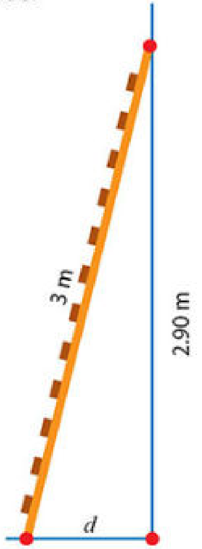
$a =$
$b =$
$c =$

1. Aplica alguna de estas fórmulas para que resuelvas los siguientes problemas.
   a) Una escalera de 3 m de longitud se coloca recargada en un muro vertical, separando la base del muro a una distancia de 1.10 m.

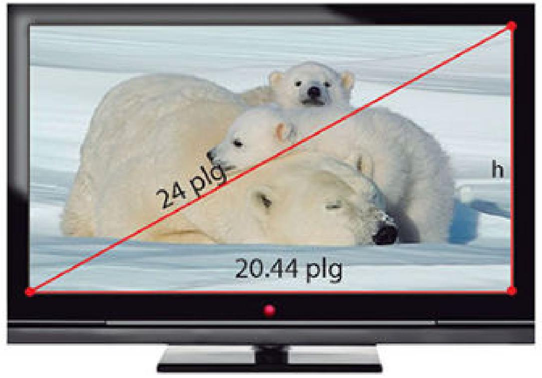
   ¿Qué altura (h) alcanza la escalera sobre el muro vertical?

   b) ¿A qué distancia separada del muro, debe colocarse la escalera para que alcance una altura de 2.90 m?





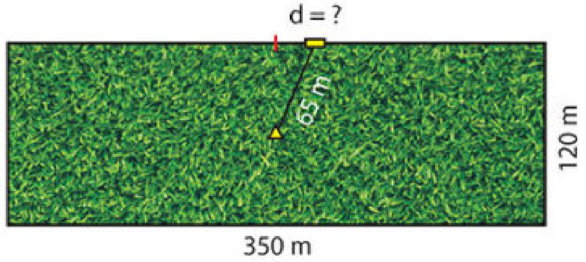
2. El tamaño comercial de una pantalla de televisión es la longitud de su diagonal, medida en pulgadas.
   a) ¿Qué altura tiene una pantalla de 24 plg, si su base mide 20.44 plg?
   b) ¿Cuánto mide la base de una pantalla de 42 plg, si su altura es de 20.01 plg?
   c) ¿Cuál es el tamaño comercial de una pantalla cuyas dimensiones son 27.25 plg × 16.78 plg?



3. Las dimensiones de una cancha de futbol profesional son de 90 m × 120 m. ¿Cuál es la distancia máxima que un jugador puede correr en línea recta dentro de la cancha?

Discutan en torno a los siguientes problemas y resuélvanlos.

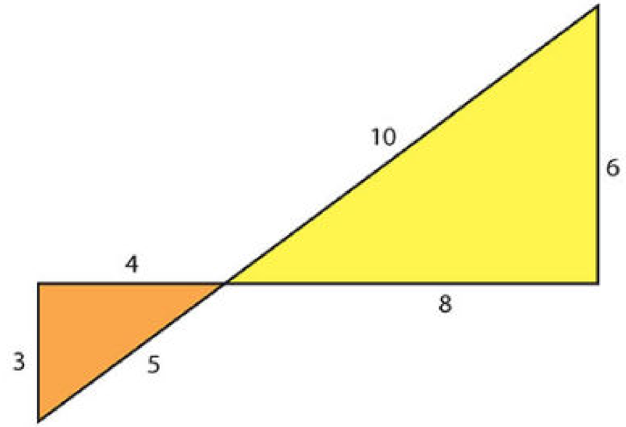
1. En el centro de un terreno rectangular que mide 120 m × 350 m, se encuentra una caseta de vigilancia. Alrededor del terreno se construirá una barda y sólo habrá una entrada. ¿A qué distancia del centro de uno de los lados largos debe colocarse la entrada para que quede a 65 m de la caseta?



2. ¿Cuál es la altura de una pirámide cuadrangular, cuya base mide 16 cm × 16 cm y cada una de sus aristas mide 17 cm?

Ternas pitagóricas

Observa la siguiente figura y, con base en ella, realiza lo que se solicita.

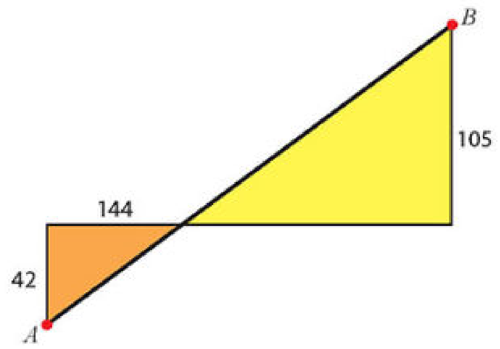


1. Escribe dos ternas pitagóricas distintas a las que muestra la figura, pero que sean proporcionales a éstas. ____________ y ____________.
2. Verifica si las siguientes colecciones son ternas pitagóricas.

   (5, 12, 13); (7, 24, 25); (8, 15, 17); (9, 40, 41) y (20, 21, 29)

En particular, a éstas se les llama ternas pitagóricas primitivas porque los números que las forman no tienen un factor común.

Observen la siguiente figura. Después, discutan el procedimiento a seguir para calcular la distancia entre los puntos A y B, y respondan lo que se solicita.



a) ¿Cuál es la terna pitagórica primitiva que se relaciona con este problema?

b) ¿Qué múltiplo de dicha terna se encuentra en el triángulo menor?

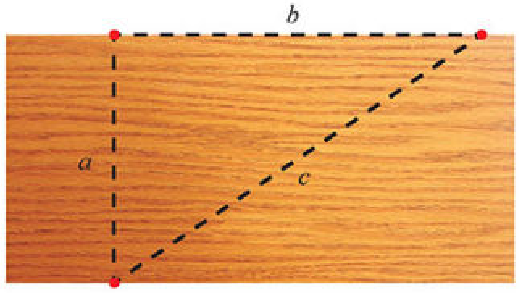
c) ¿Qué múltiplo de la terna se encuentra en el triángulo mayor?

d) ¿Cuánto mide la hipotenusa del triángulo menor?

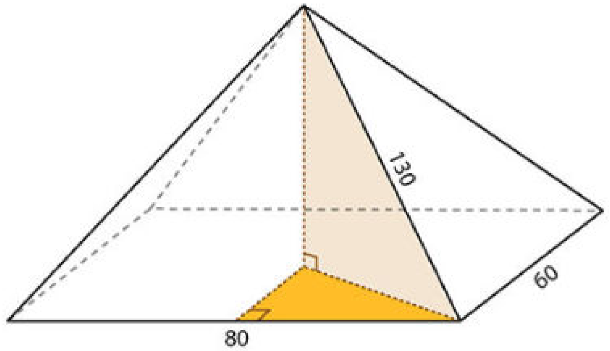
e) ¿Cuánto mide la hipotenusa del triángulo mayor?

f) ¿Cuál es la distancia del punto A al punto B?

Analicen y resuelvan los siguientes problemas.



1. Un carpintero desea cortar en ángulo recto una tabla de 25 cm de ancho, pero no tiene escuadra. ¿Qué terna pitagórica le sería útil para trazar la línea de corte? ¿Qué medidas debe marcar en la tabla antes de trazar su línea?



2. Calculen la altura de una pirámide cuya base es un rectángulo de 60 cm × 80 cm, y cada una de sus aristas mide 130 cm. Pista: es necesario utilizar dos veces el teorema de Pitágoras. Observen la figura que se muestra y recuerden la construcción y características de una pirámide.

Nociones de probabilidad

Cálculo de la probabilidad de ocurrencia de dos eventos mutuamente excluyentes y de eventos complementarios (regla de la suma)

Reactivando el saber

Analiza la situación que se presenta a continuación y responde lo que se solicita.

Cuando tiras un dado hay 6 posibles resultados: {1, 2, 3, 4, 5 y 6}. Cuando tiras dos dados y sumas los resultados que salieron hay 11 posibles resultados: {2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 y 12}.

a) Si al tirar un dado salió un número par, ¿qué resultados pudieron haber salido?

b) ¿Qué resultados no pudieron haber salido?

c) Si al tirar dos dados, en uno de ellos sale 6, ¿qué resultados puedes obtener al sumar este resultado con el del otro dado?

d) ¿Qué resultados no puedes obtener en ese caso?

El espacio muestral

En un experimento, al conjunto de resultados posibles se le conoce con el nombre de espacio muestral; dependiendo del experimento que se vaya a realizar, el espacio muestral puede ser finito o infinito.

Un ejemplo de espacio muestral finito nos lo proporciona un dado, en este caso el espacio muestral (conjunto de eventos posibles) es {1, 2, 3, 4, 5, 6}. Un ejemplo de espacio muestral infinito es el conjunto de fracciones cuyo numerador es cero y el denominador es cualquier número distinto de cero, en ese caso no podemos hacer una lista que contenga todos los eventos, pues el conjunto es infinito. En esta secuencia trabajaremos con experimentos del tipo finito, pues el manejo del infinito requiere un enfoque especial.

En caso de que un dado tuviera una cara marcada con 1, dos caras marcadas con 2 y tres caras marcadas con 6, el espacio muestral sería {1, 2, 6}, pero cada evento tendría una probabilidad diferente.

Matemáticas en el pasado

El físico, matemático y astrónomo francés Pierre Simon de Laplace (1749 - 1827) fue uno de los principales estudiosos de la teoría moderna de la probabilidad. En 1812 publicó "Teoría de las probabilidades", y en 1814 "Ensayo filosófico de las probabilidades"; en esta obra enunció en diez principios generales todo lo que hasta entonces se sabía sobre el tema. Laplace dijo "Hemos de considerar el estado actual del Universo como el efecto de su estado anterior y como la causa del que ha de seguirle"; también mencionó: "La palabra azar sólo expresa nuestra ignorancia de las causas de los fenómenos que observamos que ocurren y se suceden sin ningún orden aparente. La probabilidad es relativa en parte a nuestra ignorancia y en parte a nuestro conocimiento".

Pierre Simón de Laplace

Tomado de: Alberto Campos, *Laplace: Ensayo filosófico sobre las probabilidades*, diciembre de 2004.

Una vez que hemos determinado el espacio muestral de un experimento aleatorio, podemos entrar en el terreno de asignar a cada evento una probabilidad. Para ello distinguiremos dos tipos de eventos.

Eventos simples

Son los eventos del espacio muestral.

a) En el caso de tirar un dado, ¿cuáles son los eventos simples?

Eventos compuestos

Es una colección o agrupamiento de eventos simples.

a) En el caso de tirar un dado, ¿cuáles son los resultados posibles correspondientes al evento compuesto "obtener un número par"?

b) Y ¿cuáles son los resultados posibles correspondientes al evento compuesto "obtener un número múltiplo de 3"?

Probabilidad de eventos simples

La probabilidad asociada a un evento simple es un número entre 0 y 1 que corresponde a la fracción:

$$\frac{1}{\text{(Número de eventos posibles)}}$$

a) Al tirar un dado, ¿cuál es la probabilidad de obtener el evento simple "obtener un 5"?

En general, la probabilidad de obtener un evento "x" se escribe $P(x)$.

b) Escribe las probabilidades de los siguientes eventos simples al tirar un dado:

- $P(1)=$ • $P(3)=$ • $P(5)=$
- $P(2)=$ • $P(4)=$ • $P(6)=$

c) Retomando el ejemplo del dado con una cara marcada: 1, dos caras marcadas: 2, y tres caras marcadas: 6. Escribe las probabilidades de los siguientes eventos simples:

- $P(1)=$ • $P(2)=$ • $P(6)=$

Determina el espacio muestral de los siguientes experimentos.

Experimento	Espacio muestral
Tirar una moneda	
Elegir un número del 0 al 9	
Sacar una canica de una bolsa con 2 rojas y 6 azules	
Elegir una letra del alfabeto español	
Sacar un objeto de los que hay en tu bolsillo	

Completa la tabla y determina las probabilidades de cada uno de los eventos simples que se presentan en los siguientes experimentos aleatorios.

Palabra Mu

Aleatorio. Suceso cuya frecuencia depende del azar.

Experimento	Espacio muestral	Probabilidad de cada evento simple
Sacar una moneda (M) de un bolsillo que tiene: • 3 monedas de ¢0.50 • 2 monedas de $1 • 3 monedas de $2 • 1 moneda de $5 y • 1 moneda de $10	{¢0.50, $1, $2, $5, $10}	$P(\$2) = \frac{3}{10}$, $P(\$5) = \frac{1}{10}$, $P(\$10) = \frac{1}{10}$,
Sacar una canica (C) de una bolsa con 3 blancas y 2 verdes.		
Sacar un chocolate relleno (R) de un paquete que contiene 15 de fresa, 10 de limón y 25 de cereza.		
Elegir una representante de grupo entre Ana de 10 años, Claudia de 12 años y Paty de 8 años.		
Tirar un dado azul y uno rojo, considerar que la diferencia entre sus puntos (azul - rojo) sea positiva o cero. Ejemplo: $5 - 2 = 3$		

Bloque 2

Probabilidad de eventos compuestos

Cuando se tienen eventos compuestos, el cálculo de probabilidades requiere analizar cuidadosamente el espacio muestral. Las matemáticas nos ofrecen herramientas que nos facilitarán el trabajo.

Considera el experimento aleatorio *lanzar un dado* y su espacio muestral {1, 2, 3, 4, 5, 6}, además examina las probabilidades.

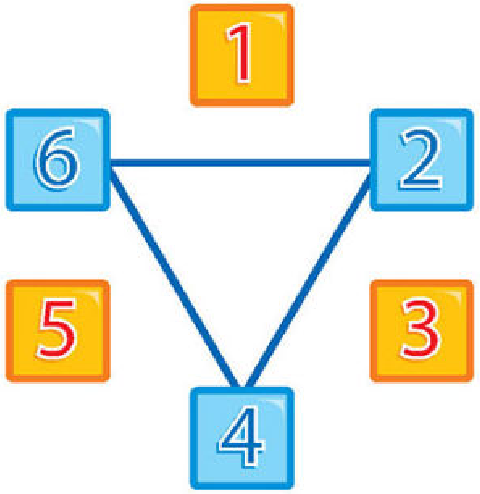
$$P(1) = \frac{1}{6},\ P(2) = \frac{1}{6},\ P(3) = \frac{1}{6},\ P(4) = \frac{1}{6},\ P(5) = \frac{1}{6},\ P(6) = \frac{1}{6}$$

a) Ahora piensa en el evento compuesto para obtener un número par (está compuesto por los eventos simples 2, 4, 6), el siguiente esquema puede ayudarte.

- ¿Cómo puede calcularse la probabilidad de obtener un número par?

b) Calcula las siguientes probabilidades:

- Obtener un número menor que 4
- Obtener un número impar
- Obtener un múltiplo de 3
- Obtener un número primo



c) En general, ¿se te ocurre algún método para calcular la probabilidad de eventos compuestos, a partir de las probabilidades de los eventos simples que los forman? Descríbelo.

Analiza y resuelve los siguientes problemas.

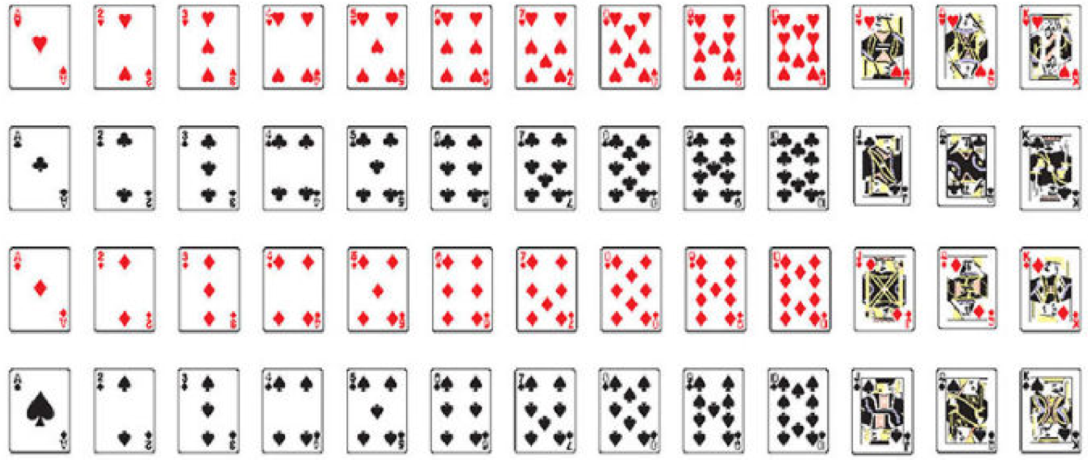
1. Considera el experimento aleatorio *tirar dos dados y sumar los resultados* y sobre éste, los eventos compuestos *obtener un número par y obtener un número impar.* Calcula la probabilidad de cada uno de ellos.

2. Considera el experimento aleatorio *tirar tres monedas* y el evento compuesto *que dos de las tres monedas caigan águila.* Calcula su probabilidad.

3. Considera el experimento aleatorio *tirar dos dados y calcular la diferencia (positiva o cero) entre sus puntos,* y el evento compuesto *obtener un número mayor que 4.* Calcula su probabilidad.

Combinaciones de eventos compuestos que son excluyentes o no excluyentes

En ocasiones, es necesario calcular la probabilidad de eventos compuestos determinados con múltiples condiciones, por ejemplo, tomaremos como experimento *sacar una carta de baraja* que tiene como espacio muestral las siguientes cartas.



Las probabilidades de eventos compuestos como *sacar un corazón*, *sacar una letra* o bien *sacar un número par* son sencillas de calcular, pero qué tal un evento como *sacar una letra o una carta que sea corazón y número par.*

¿Será posible calcular la probabilidad de un evento como éste en términos de eventos menos complicados?

Al finalizar el apartado volveremos sobre la probabilidad de este evento, por lo pronto analizaremos un par de términos.

Eventos excluyentes y eventos no excluyentes

Considera el experimento *tirar un dado* y calcula las probabilidades de los siguientes eventos compuestos, toma en cuenta que (1 U 2) significa sacar 1 o sacar 2.

a) $P(1 \cup 2) =$

b) $P(3 \cup 4) =$

c) $P(5 \cup 6) =$

Estos tres eventos se consideran excluyentes porque no hay traslapes entre ellos, es decir, que no hay un resultado que pertenezca a ambos eventos compuestos; esta cualidad resultará importante más adelante. De la definición de eventos excluyentes, se dice que todos los eventos simples son excluyentes entre sí, ¿por qué?

Considera los siguientes eventos compuestos y calcula sus probabilidades.

a) *P*(*sacar un número impar*) =

b) *P*(*sacar un número mayor que 3*) =

c) ¿Los eventos anteriores son excluyentes o no excluyentes?, ¿por qué?

d) ¿A cuál de ellos pertenece el evento simple *sacar un 5*?

Recapitulemos lo aprendido hasta ahora.

- El *espacio muestral* de un experimento aleatorio es el conjunto de posibles resultados del experimento.
- Cada elemento perteneciente al espacio muestral es considerado un *evento simple*.
- Una colección de varios eventos simples es considerada un *evento compuesto*.
- Cuando en un experimento aleatorio se tienen dos eventos: A (evento 1) y B (evento 2), se dice que, A y B son *eventos excluyentes*, si no hay ningún evento simple que pertenezca simultáneamente al evento A y al evento B, es decir, la ocurrencia de A excluye totalmente la posibilidad de que al mismo tiempo ocurra B y viceversa.
- Cuando en un experimento aleatorio se tienen dos eventos A y B, se dice que son *eventos no excluyentes*, si al menos existe un evento simple que pertenezca al evento A y al evento B, es decir, si la ocurrencia de A no excluye la posibilidad de que al mismo tiempo ocurra B.
- Todos los eventos simples son excluyentes respecto a otros eventos simples, pues el hecho de que ocurra un evento simple excluye totalmente la posibilidad de que al mismo tiempo ocurra otro.

Los conectivos "o" e "y"

Calcula la probabilidad de que ocurra *sacar 1 U 2* y *sacar 3 U 4* de manera simultánea. Para calcular esa probabilidad utiliza los conectivos "o" e "y" para combinarlos.

a) ¿Qué entiendes por la probabilidad de *sacar 1 U 2* o *sacar 3 U 4*?

b) ¿Qué entiendes por la probabilidad de *sacar 1 U 2* y *sacar 3 U 4*?

c) Uno de estos dos eventos combinados tiene probabilidad cero, es decir, es un evento imposible, ¿cuál es?

Visualizando los conectivos "o" e "y"

Estudia los diagramas de Carroll para el análisis de dos eventos.

Para apreciar la utilización de los diagramas de Carroll en el análisis de dos eventos, imaginemos que tenemos dos eventos A y B y sus opuestos *no* A y *no* B.

Esta clasificación nos permite partir el espacio muestral en dos regiones, como lo muestra el siguiente diagrama.

	B	no B
A	A y B	A y no B
no A	no A y B	no A y no B

En el diagrama se puede leer que hay dos conjuntos, el conjunto A representado por la primera fila y el conjunto B representado por la primera columna. La celda que es común a esa fila y a esa columna representa la intersección de A y B.

	B	no B
A	A y B	A y no B
no A	no A y B	no A y no B

Las tres celdas que forman esa fila y esa columna, todas juntas son la unión de A con B.

	B	no B
A	A y B	A y no B
no A	no A y B	no A y no B

La cuarta celda, es decir, la que no pertenece ni a la primera fila ni a la primera columna, representa el complemento de la unión de A con B, es decir, el caso en que no sucede A y no sucede B.

	B	no B
A	A y B	A y no B
no A	no A y B	no A y no B

Volviendo al ejemplo del dado, consideremos ahora el evento compuesto A = {salga 1 o 2} y al evento B = {salga 3 o 4}, luego clasificamos el espacio muestral usando los criterios: (1 U 2 o no 1 U 2) y (3 U 4 o no 3 U 4). Recuerda que (1 U 2) significa "que salga 1 o 2", y no (1 U 2) significa "que no salga ni 1, ni 2", lo mismo para (3 U 4) y no (3 U 4): Representamos los eventos en un diagrama de Carroll.

	(3 U 4)	*no* (3 U 4)
(1 U 2)	(1 U 2) y (3 U 4)	(1 U 2) y *no* (3 U 4)
no (1 U 2)	*no* (1 U 2) y (3 U 4)	*no* (1 U 2)y *no* (3 U 4)

Bloque 2

Vemos que el espacio queda dividido en cuatro regiones.

a) Una de ellas contiene los números que cumplen los criterios (1 U 2) y (3 U 4).

b) Otra contiene los números que cumplen el criterio (1 U 2) pero no el criterio (3 U 4).

c) Otra contiene los números que cumplen el criterio (3 U 4) pero no el criterio (1 U 2).

d) La última contiene los números que no cumplen ni el criterio (1 U 2) ni el criterio (3 U 4).

Ahora, haciendo el análisis de la tabla, podrás observar que si ocurre el evento (1 U 2) entonces no puede ocurrir al mismo tiempo el evento (3 U 4), por lo que estos eventos son ________________.

De lo anterior, inferimos que la región correspondiente a la intersección de los eventos A y B debe quedar vacía en la tabla.

	(3 U 4)	*no* (3 U 4)
(1 U 2)	(1 U 2) y (3 U 4)	(1 U 2) y *no* (3 U 4)
no (1 U 2)	*no* (1 U 2) y (3 U 4)	*no* (1 U 2)y *no* (3 U 4)

a) ¿Se cumple en este caso que P(1 U 2 o 3 U 4) = P(1 U 2) + P(3 U 4)?

b) ¿Cómo puedes calcular P(1 U 2 y 3 U 4)?

Elabora el diagrama de Carroll que corresponde a los eventos *sacar un número impar* y *sacar un número mayor que 3*; después utilízalo para analizar el evento compuesto *sacar número impar y mayor que 3* y el evento compuesto *sacar número impar o mayor que 3*.

a) ¿Se trata de eventos excluyentes o no excluyentes? ¿En qué celda del diagrama te fijas para saberlo?

b) ¿Qué números pertenecen al evento *sacar número impar y mayor que 3*?

c) ¿Qué números pertenecen al evento *sacar número impar o mayor que 3*?

d) ¿Se cumple en este caso que P(*número impar o mayor que 3*) = *P*(*número impar*) + *P*(*número mayor que 3*)?, ¿por qué?

e) ¿Cómo puedes calcular P(*número impar y mayor que 3*)?

f) ¿Cómo utilizarías *P*(*no impar ni mayor que 3*) para calcular *P*(*número impar o mayor que 3*)?

Unión (o) e intersección (y) de eventos compuestos

Para calcular la probabilidad de dos eventos combinados, es importante distinguir si se trata de eventos excluyentes o no excluyentes, pues en uno de estos vale la regla.

Considera los eventos A y B para realizar los ejercicios.

a) Si se conoce $P(A)$ y $P(B)$, entonces (A o B) = $P(A)+P(B)$.
   - Explica si esta regla es válida para eventos excluyentes o eventos no excluyentes.

b) Si se conoce $P(A)$, $P(B)$, entonces P(A y B) = 0.
   - Explica si esta regla es válida para eventos excluyentes o eventos no excluyentes.

c) ¿En qué casos la regla P(A o B) = $P(A)$ + $P(B)$ − P(A y B) puede ser útil?

Para verificar las reglas que acabamos de discutir, considera el experimento *tirar un dado*.

1. Calcula las siguientes probabilidades.
   a) *P*(*sacar un número par*) =
   b) *P*(*sacar un número menor que 3*) =
   c) *P*(*sacar un número mayor que 2*) =
2. Trata de aplicar las reglas que acabamos de discutir, tomando en cuenta si los eventos se combinan, son excluyentes o no. Si necesitas visualizar el problema, traza los diagramas de Carroll que necesites.
   a) Calcula la probabilidad compuesta de dos eventos.
      - *P*(*sacar un número que sea menor que 3 y mayor que 2*) =
      - *P*(*sacar un número que sea menor que 3 o mayor que 2*) =
   b) Calcula la probabilidad compuesta de dos eventos.
      - *P*(*sacar un número que sea par y mayor que 2*) =
      - *P*(*sacar un número que sea par o mayor que 2*) =

Después de haber realizado estas actividades y de analizar los diagramas de Carroll correspondientes, ¿se te ocurre una manera general que permita calcular P(A o B) en términos de P(*no* A y *no* B)? Descríbela.

a) Cuando se tienen dos eventos excluyentes, se cumplen las siguientes reglas.
   - *P*(*evento 1 y evento 2*) = 0
   - *P*(*evento 1 o evento 2*) = *P*(*evento 1*) + *P*(*evento 2*)
   - *P*(*evento 1 o evento 2*) = *P*(*evento 1*) + *P*(*evento 2*) − *P*(*evento 1 y evento 2*)

b) Cuando se tienen dos eventos excluyentes o no, se cumplen las siguientes reglas:
   - Se puede utilizar un diagrama como los de Carroll para determinar

     P(*evento 1 y evento 2*)
   - *P*(*evento 1 o evento 2*) = 1 − *P*(*evento 1 y evento 2*)

   Este último es conocido como la probabilidad de que un evento no ocurra.

Volvamos al experimento *sacar una carta de una baraja*

A partir de las probabilidades anteriores y de lo que has estudiado en este apartado, calcula las probabilidades.

a) P(*sacar un corazón*)

b) P(*sacar una letra*)

c) P(*sacar un número par*)

d) P(*sacar una letra y que sea corazón*)

e) P(*sacar una letra o número par*)

f) P(*sacar una carta que sea corazón o número par*)

g) P(*sacar una carta que sea corazón y número par*)

Para cerrar este apartado realiza las siguientes actividades.

1. Explica el uso de los conectivos vistos en este episodio para componer eventos nuevos a partir de dos eventos conocidos. Ilustra tu explicación con un ejemplo en el que, a partir de los eventos *evento 1* y *evento 2*, construyas los eventos (*evento 1* y *evento 2*), (*evento 1* o *evento 2*).

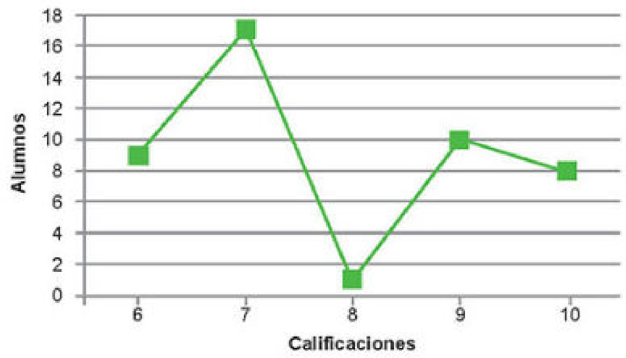
Conectivo "y"	Conectivo "o"

2. Explica cómo calcular las probabilidades P(*evento 1* y *evento 2*), P(*evento 1* o *evento 2*) a partir de las probabilidades P(*evento 1*), P(*evento 2*). Ilustra la explicación con un ejemplo.

Evaluación tipo PISA

Lee, analiza la información presentada y resuelve las siguientes situaciones problemáticas.

Los alumnos de 3° B estuvieron en desacuerdo con su maestro de Formación Cívica y Ética cuando les dijo que sólo 40% de los alumnos había tenido buen desempeño con resultados superiores a 8, por lo que decidieron analizar la gráfica con las calificaciones que obtuvieron:



1. ¿Cuál es la calificación que más se repite?
a) 6
b) 7
c) 8
d) 9

2. ¿Cuántos alumnos hay en el grupo?
a) 20
b) 27
c) 37
d) 45

3. ¿Qué porcentaje de alumnos tuvo la calificación de excelencia?
a) 15.5%
b) 17.7%
c) 35.4%
d) 40%

4. ¿Qué porcentaje de alumnos tuvo un bajo desempeño?
a) 60%
b) 72%
c) 80%
d) 95%

Con este código, valora tus habilidades para resolver problemas utilizando el teorema de Pitágoras.

Bloque 2

Competencias que se favorecen

- Resolver problemas de manera autónoma
- Comunicar información matemática
- Validar procedimientos y resultados
- Manejar técnicas eficientemente

Aprendizajes esperados

- Resuelve problemas que implican el uso de ecuaciones de segundo grado.
- Resuelve problemas de congruencia y semejanza que implican utilizar estas propiedades en triángulos o cualquier figura.

Patrones y ecuaciones

Resolución de problemas que implican el uso de ecuaciones cuadráticas. Aplicación de la fórmula general para resolver dichas ecuaciones

Reactivando el saber

En el Bloque 2, resolviste algunas ecuaciones cuadráticas por factorización.

Con base en tus conocimientos, realiza la actividad que se presenta a continuación.

1. Una de las siguientes ecuaciones es factorizable, la otra no. Identifica cuál sí lo es y explica por qué.

$$x^2 + 6x + 1 = 0$$
$$x^2 + x - 6 = 0$$

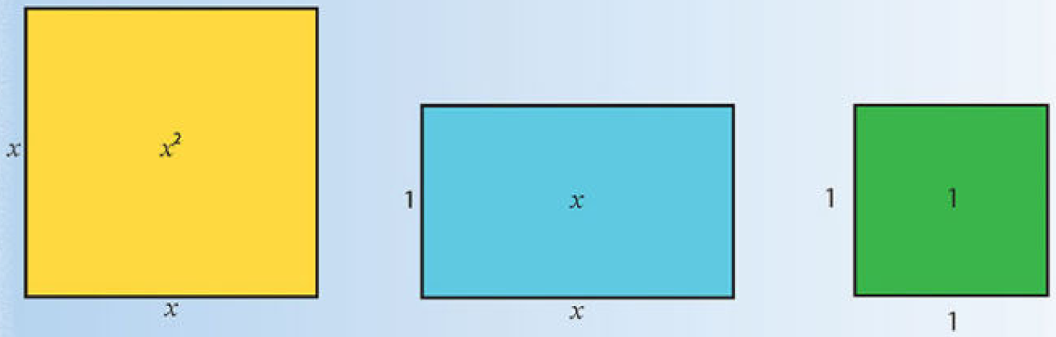
   a) ¿Hay dos enteros que sumen 1 y su producto sea -6?, ¿cuáles son? Si no los hay explica por qué.

   b) ¿Hay dos enteros que sumen -6 y su producto sea 1?, ¿cuáles son? Si no los hay explica por qué.

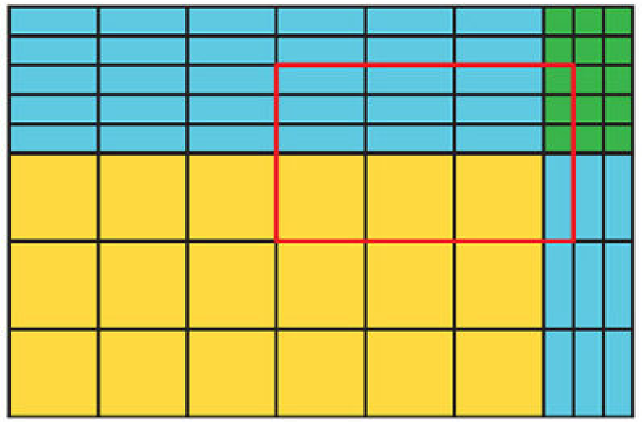
   c) Escribe en forma factorizada la ecuación que resultó factorizable.

2. Usa la suma y el producto de los enteros 3 y 2, para escribir una ecuación factorizable, en la forma general $ax^2 + bx + c = 0$ y en la forma factorizada $(x + h)(y + k) = 0$.

Es posible visualizar de manera gráfica por qué una de las ecuaciones anteriores no es factorizable. Si x es un número positivo, las cantidades x^2, x y 1 se pueden representar en forma gráfica como las áreas de las siguientes figuras:



Realicen lo que se solicita a continuación.



1. Escriban la expresión algebraica que corresponde al área del rectángulo rojo de la figura de la derecha.
2. Tracen un rectángulo formado con 6 piezas amarillas ($6x^2$), 5 azules ($5x$) y una verde (1); posteriormente, usen la figura encontrada para resolver por factorización la ecuación

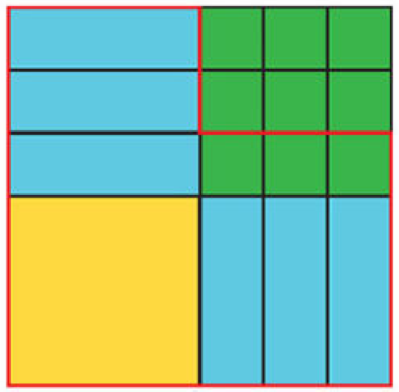
   $6x^2 + 5x + 1 = 0.$
3. Tracen un rectángulo integrado por 3 piezas amarillas ($3x^2$), 5 azules ($5x$) y 2 verdes (2).
4. Usen la figura para resolver por factorización la ecuación $3x^2 + 5x + 2 = 0$.
5. Intenten trazar un rectángulo con una pieza amarilla (x^2), 6 azules ($6x$) y 3 verdes (3).

   a) ¿Es posible factorizar la ecuación $x^2 + 6x + 3 = 0$?

   b) ¿De qué manera la resolverían?

   c) ¿Cuántas piezas verdes hacen falta para que la ecuación se pueda factorizar?

La siguiente figura les da una pista para que intenten resolver la ecuación anterior.



¿Qué pasa si a la ecuación $x^2 + 6x + 3 = 0$ le sumas a ambos lados ese número que hace falta? Verifiquen si se puede escribir en la forma $(x + 3)^2 = 6$. ¿Cómo resolverían esta ecuación? ¿Cuáles son sus soluciones?

Bloque 3

Palabra Mu

Trinomio Cuadrado Perfecto (TCP). Es una expresión algebraica compuesta por tres términos, uno cuadrático, otro lineal y otro independiente, que a su vez es el cuadrado de un binomio.

El procedimiento anterior tiene una parte constructiva que es la clave para resolver la ecuación; esto es, a ambos miembros de la ecuación se les suma una constante para lograr que la representación geométrica del miembro de la izquierda sea un cuadrado. En el ejemplo, el cuadrado que se completó tiene un lado cuya medida está dada por el binomio $x + 3$; así, el área total del cuadrado es el cuadrado de ese binomio $(x + 3)^2$, que a su vez puede expresarse también como el trinomio $x^2 + 6x + 9$. A éstos se les conoce como **trinomios cuadrados perfectos** porque son el cuadrado de un binomio. Al procedimiento de ajustar la constante en el trinomio original se le denomina completar un trinomio cuadrado perfecto (completar un TCP).

Tracen los cuadrados que corresponden a los siguientes binomios uniendo sólo piezas amarillas y azules de las que han utilizado en esta secuencia.

$$x^2 + 12x$$

$$x^2 + 8x$$

$$x^2 + 2x$$

1. Observen cuántas piezas verdes hacen falta para completar el cuadrado de cada binomio. Al final, escriban los trinomios cuadrados perfectos que resulten.

2. Discutan sobre el procedimiento que seguirían para completar los cuadrados sin apoyarse en alguna figura; centren sus argumentos en responder las siguientes preguntas.

Si el binomio original $x^2 + bx$ quiere transformarse en el trinomio cuadrado perfecto $x^2 + bx + c$ que a su vez es el cuadrado del binomio $(x + h)^2$.

a) ¿Qué relación tiene la constante h con b?

b) ¿Qué relación tiene la constante c con h?

3. Observen el desarrollo del cuadrado del binomio $(x + h)^2$, que es:

$$x^2 + 2hx + h^2$$

Compárenlo con la expresión cuadrática original:

$$ax^2 + bx + c$$

Ahora completen el siguiente argumento:

Una expresión cuadrática de la forma $ax^2 + bx + c$ es un TCP cuando su coeficiente cuadrático ____ es igual a ____; su coeficiente lineal ____, es el doble de un entero ____; y su término independiente ____ es el cuadrado de dicho entero.

Compartan y discutan con sus compañeros las conclusiones a las que llegaron y pidan la intervención de su profesor para llegar a un acuerdo grupal al respecto.

Usen el procedimiento del esquema anterior para realizar lo que se solicita.

1. Completen los TCP y escríbanlos en la forma $(x + h)^2 = x^2 + bx + c$.

   a) $x^2 + 3x$

   b) $x^2 - 3x$

   c) $x^2 - 5x$

2. Resuelvan las siguientes ecuaciones completando en cada caso un TCP.

   a) $x^2 + 4x + 1 = 0$

   b) $x^2 + 4x - 3 = 0$

   c) $x^2 + 3x + \frac{3}{4} = 0$

   d) $x^2 - 3x + 1 = 0$

Antes de continuar, es conveniente reconocer los nombres que tienen los términos de una ecuación cuadrática general $ax^2 + bx + c = 0$, en la que los coeficientes a, b y c pueden ser positivos, negativos o cero, pero:

a) ¿Tendría sentido pensar en una ecuación cuadrática en la que $a = 0$?

b) Dado el caso, ¿de qué tipo de ecuación se trataría?

Al término ax^2 se le llama cuadrático, a bx se le denomina lineal y c es el término independiente (porque no depende de la variable x), de aquí que a sea el *coeficiente cuadrático*, b el *coeficiente lineal* y c el *coeficiente constante o independiente*.

Completar trinomios cuadrados perfectos es una herramienta muy útil para resolver ecuaciones cuadráticas que no son factorizables. A manera de resumen, a continuación se muestra un procedimiento para resolver ecuaciones cuadráticas cuyo coeficiente cuadrático es distinto de 1, la clave del proceso está en dividir la ecuación por una constante adecuada.

Analiza y responde lo siguiente.

Considera la ecuación $3x^2 + 2x - 5 = 0$

a) Al dividirla entre 3, ¿en qué ecuación se convierte? ________.

b) Para completar un TCP, se deja del lado izquierdo el binomio que consta de los términos cuadrático y lineal, pasando al lado derecho del término independiente. ¿Cómo queda la ecuación? ________.

c) Luego se identifica la constante h, dividiendo b entre 2, que en este caso resulta la mitad de $\frac{2}{3}$. ¿A qué es igual h? ________.

d) La constante c, necesaria para completar el TCP, es el cuadrado de h, ¿a qué es igual c?

Bloque 3

e) Al sumar esta constante a ambos miembros de la ecuación, ¿qué se obtiene?

f) En forma simplificada resulta: $x^2 + \frac{2}{3}x + \frac{1}{9} = \frac{16}{9}$.

g) Y esta última ecuación puede escribirse ya en forma factorizada, tomando en cuenta que su lado izquierdo es el cuadrado del binomio $(x+h)^2$, ¿a qué es igual?

h) Comprueba que la ecuación queda, por tanto, de la forma $\left(x + \frac{1}{3}\right)^2 = \frac{16}{9}$.

i) Al tomar la raíz cuadrada a ambos miembros se obtiene $\left|x + \frac{1}{3}\right| = \frac{4}{3}$, que se resuelve con un doble signo para el argumento del valor absoluto; es decir: $x + \frac{1}{3} = \pm\frac{4}{3}$.

j) Finalmente, al despejar la variable x, se obtienen dos soluciones, ¿cuáles son?

$x_1 =$ ____________

$x_2 =$ ____________

Realiza lo que se solicita a continuación.

1. Aplica el procedimiento que acabas de aprender. En cada paso escribe la ecuación resultante.

$$2x^2 - 5x + 2 = 0$$

a) Divide entre 2: ____________

b) Lleva al lado derecho el término independiente: ____________

c) Identifica la constante que hace falta para completar el TCP y súmala a ambos miembros de la ecuación: ____________

d) Escribe ahora el lado izquierdo de la ecuación como el cuadrado de un binomio: ____________

e) Despeja el binomio, usando el doble signo: ____________

f) Obtén la solución despejando la variable: ____________

2. El propósito de esta actividad es fortalecer tus conocimientos para completar trinomios cuadrados perfectos. Enseguida se presentan otros ejercicios de práctica, resuélvelos en tu cuaderno.

$$3x^2 - 6x + 9 = 0$$

$$4x^2 + 7x - 3 = 0$$

Explora

Para reforzar tus aprendizajes accede al siguiente sitio electrónico:

http://www.matematicasvisuales.com/html/analisis/polynomial/quadratic.html

(Consulta: 13 de enero 2015).

Planteamiento de problemas

Para plantear problemas que involucren alguna ecuación cuadrática, lo primero que se debe hacer es reconocer la variable y darle un nombre; por lo regular a ésta se le llama x, aunque esto puede cambiar. Normalmente en la pregunta que se hace dentro del problema está la clave para reconocer la variable.

Analiza y resuelve los siguientes problemas.

1. Las edades de Ana y su hermano suman 24 y los cuadrados de éstas suman 290. ¿Cuáles son sus edades?
2. Un terreno rectangular de césped tiene 15 m más de largo que de ancho. Si dentro del terreno se construye una pista de 3 m de ancho y el área total de césped que queda rodeado por ésta es de 1 666 m^2. ¿Cuáles son las dimensiones del terreno?
3. Un salón de fiestas rectangular tiene 3 m más de largo que de ancho. El salón es ampliado, aumentando su largo en 2 m y su ancho en 3 m. Si el área resultante es de 1 155 m^2 ¿Qué dimensiones tenía originalmente el salón? ¿Cuáles son las dimensiones después de la ampliación?

Resuelvan las siguientes situaciones.

1. Para el primer problema de esta página, formulen una pregunta equivalente que haga referencia sólo a la edad de Ana, asignen la variable y utilícenla para expresar, en forma algebraica, cada una de las siguientes oraciones.
   a) La edad de Ana
   b) La edad de su hermano (dado que ambas suman 24)
   c) La ecuación que corresponde a la suma de los cuadrados de las edades
2. Para el segundo problema, formulen una pregunta donde sólo se mencione el ancho del terreno y expresen cada una de las siguientes oraciones usando la variable:
   a) El ancho del terreno
   b) El largo del terreno (dado que mide 15 metros más que el ancho)
   c) El ancho del terreno ya reducido por la pista
   d) El largo del terreno reducido
   e) La ecuación que corresponde al área del terreno reducido
3. Para el problema 3 procedan de manera similar a los anteriores y planteen la ecuación correspondiente.
4. Completando un TCP, resuelvan las ecuaciones resultantes. Posteriormente, resuelvan los problemas.

Bloque 3

La fórmula general

Si se aplica el procedimiento de completar el TCP, se puede obtener una fórmula de aplicación general para cualquier ecuación cuadrática, que no sólo sirve para encontrar la solución, sino también para discriminar (distinguir) el tipo de solución que tiene la ecuación antes de resolverla.

La ecuación cuadrática general tiene la forma $ax^2 + bx + c = 0$, sus soluciones o raíces se calculan a partir de la formula general:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Observa que dentro del radical aparece la expresión $b^2 - 4ac$, la cual recibe el nombre de discriminante.

Reunidos en equipos de tres integrantes, consideren las ecuaciones de la tabla y completen las casillas con los valores correspondientes.

Ecuación	a	b	c	$b^2 - 4ac$	Soluciones de la ecuación	
$3x^2 + 2x + 1 = 0$						
$2x^2 + 4x + 2 = 0$						
$5x^2 + 3x - 2 = 0$						

1. ¿Qué se puede decir de una ecuación en la que el valor de $b^2 - 4ac$ es negativo? ¿Qué se puede decir cuando el resultado de $b^2 - 4ac$ es cero? ¿Qué se puede decir cuando $b^2 - 4ac$ es positivo?
2. Busquen en el diccionario los significados de la palabra “discriminar” y discutan cuál es el sentido que tiene en este contexto, cuando se habla de un “discriminante”.

Ahora que tiene sentido el nombre de *discriminante de la ecuación cuadrática* que se da a la expresión $b^2 - 4ac$, podemos distinguir los tres tipos de soluciones que una ecuación cuadrática puede tener: Diremos que no tiene raíces reales cuando el discriminante es negativo; que tiene una raíz doble, cuando el discriminante es cero; o que tiene dos raíces distintas, si el discriminante es positivo.

Realiza lo que se solicita en cada uno de los casos que aparecen a continuación.

1. Calcula el discriminante de las siguientes ecuaciones y marca con una × la casilla correspondiente al tipo de solución para cada caso.

Ecuación	Discriminante	Ninguna	Número de soluciones	
			Una	Dos
$12x^2 - 25x + 32 = 0$				
$x^2 + 7x - 11 = 0$				
$-3x^2 + 10x + 5 = 0$				
$3x^2 + 12x + 12 = 0$				
$x^2 + 5x - 6 = 0$				

2. El discriminante también puede ser útil para saber si una ecuación es o no factorizable. Desarrolla los factores propuestos y escribe la ecuación en la forma general; después calcula su discriminante y obtén su raíz cuadrada.

Ecuación factorizada	$ax^2 + bx + c = 0$	$b^2 - 4ac$	$\sqrt{(b^2 - 4ac)}$
$(2x + 3)(3x - 5) = 0$			
$(-3x + 2)(2x - 7) = 0$			
$(5x + 1)(2x - 3) = 0$			
$(-4x - 3)(x + 2) = 0$			
$(x - 1)(x - 3) = 0$			

3. A un entero positivo, que es el cuadrado de otro entero, se le llama *cuadrado perfecto*.
   a) Escribe a continuación la lista de los primeros cuadrados perfectos.

      1, 4, 9, ____, ____, ____, ____, ____, ____, …

   b) Se reconoce que una ecuación cuadrática, con coeficientes enteros, es factorizable si el valor numérico de su discriminante es ______________________________.

Analicen las siguientes ecuaciones. Resuelvan por factorización las que sean factorizables. Apliquen la fórmula general para resolver las que no lo son.

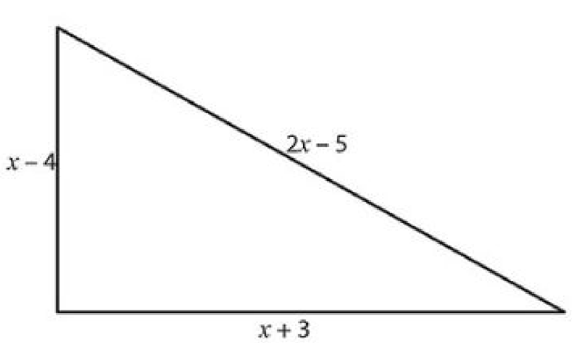
$-3x^2 - 2x + 8 = 0$	$2x^2 + 5x - 1 = 0$	$2x^2 + 7x + 4 = 0$
$-3x^2 - 2x + 3 = 0$	$2x^2 + 5x + 2 = 0$	$2x^2 + 7x + 2 = 0$

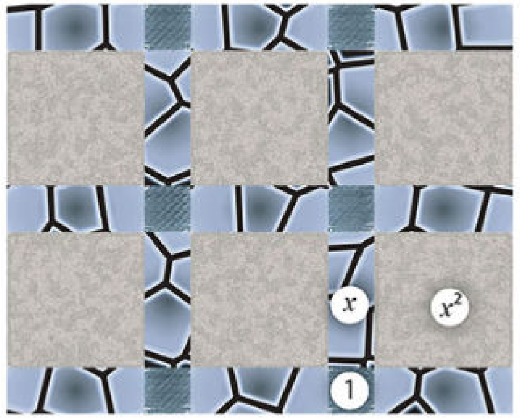
¿Por qué se puede asegurar que una ecuación cuadrática tiene dos soluciones si el signo del término independiente es contrario al del coeficiente cuadrático? Discutan en torno a la pregunta y lleguen a una conclusión.

Bloque 3

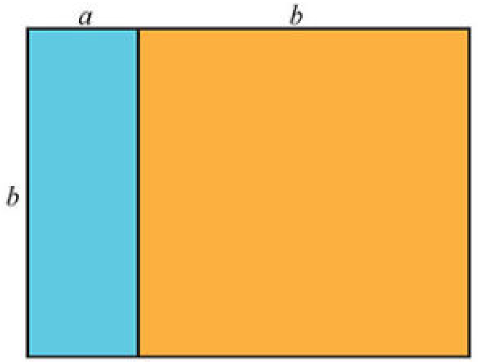
Con base en lo que has aprendido en esta secuencia de estudio, resuelve los siguientes problemas. En cada caso debes definir la variable, plantear la ecuación correspondiente y encontrar su(s) solución(es); o, en su caso, mencionar por qué es imposible.

1. ¿Cuántos triángulos rectángulos pueden construirse con las dimensiones establecidas en la siguiente figura? ¿Cuáles son los triángulos resultantes? Usa el teorema de Pitágoras.





2. Un piso debe decorarse como lo muestra la figura de la izquierda. Si el área total del piso es 154 m², ¿qué dimensiones deben tener cada una de las tres piezas? ¿Cuáles son las dimensiones del piso?

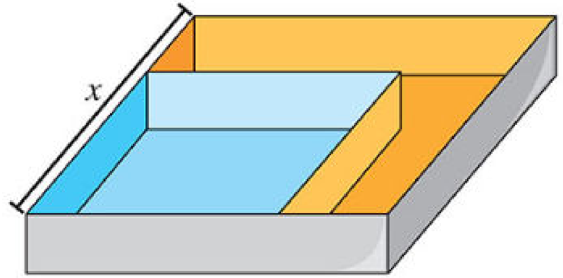


3. Un rectángulo de lados a y b, como el que se muestra en la siguiente figura, tiene una proporción $\frac{b}{a}$, tal que si sobre su lado largo se agrega un cuadrado, el rectángulo resultante tiene la misma proporción que el original. ¿Cuál es la proporción que debe tener ese rectángulo?

Analicen y discutan lo siguiente.

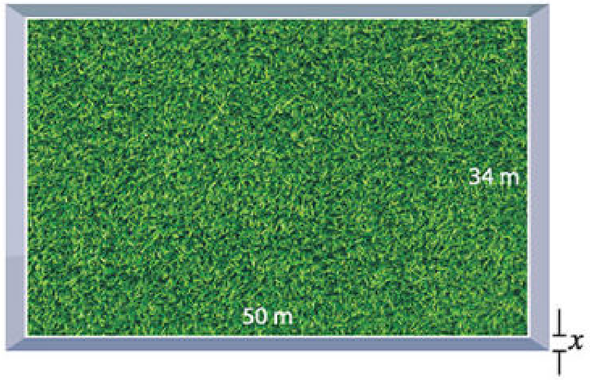
Si lo que interesa es la proporción y no el tamaño exacto del rectángulo, sin perder generalidad se puede suponer que $a = 1$ y $b = x$. ¿A qué ecuación cuadrática con variable x da lugar la igualdad de ambas proporciones $\frac{b}{a} = \frac{a+b}{b}$?

4. A una alberca de 1 m de profundidad, que originalmente era cuadrada, se le aumentaron 2 m de ancho y 3 m de largo. La nueva alberca puede contener 20 m³ de agua. ¿Qué dimensiones tenía originalmente la alberca? ¿Qué dimensiones tiene la alberca ampliada?



5. Dentro de 11 años, la edad de José Luis será la mitad del cuadrado de la edad que tenía hace 13 años. ¿Qué edad tiene ahora José Luis?

6. Una parcela rectangular de 750 m² se ha rodeado con una malla de 110 m de longitud. ¿Qué dimensiones tiene la parcela?
7. Una ampliación de un triángulo rectángulo de lados 3, 4 y 5 tiene un área de 54 m². ¿Cuánto miden los lados del triángulo ampliado?
8. Un jardín rectangular de 50 m × 34 m está rodeado por una franja de terracería de ancho uniforme. Si el área total de la franja mide 540 m². ¿Cuál es el ancho de la franja?



9. Un rectángulo semejante a otro, cuyas medidas son 9 m × 12 m, tiene una diagonal de 75 m. ¿Cuáles son las dimensiones del rectángulo?

10. La suma de un entero más su recíproco multiplicado por 4, da 17. ¿De qué entero se trata?
11. Las medidas, en centímetros, de los lados de un triángulo rectángulo son tres números pares consecutivos. ¿Cuáles son esas medidas?
12. Una pieza rectangular de cartón es 4 cm más larga que ancha. Con ésta se construye una caja sin tapa, con un volumen de 840 cm^3, recortando en cada esquina un cuadrado de 6 cm. ¿Cuáles son las dimensiones de la caja?

13. Escribe en tu cuaderno un resumen de esta secuencia de estudio, resaltando los siguientes aspectos:
    a) Identifica la forma que tiene una ecuación cuadrática, señala los términos: cuadrático, lineal e independiente.
    b) En la siguiente tabla, escribe cada ecuación cuadrática en la forma estándar e identifica los valores de sus coeficientes:

Ecuación	$ax^2 + bx + c = 0$	a	b	c
$1 - x = 3x + 5x^2$				
$\frac{2+x}{x} = 3x + \frac{2x}{x}$				
$x^2 + 2hx + h^2 = 0$				

    c) Escribe y aprende la fórmula general para resolver la ecuación.
    d) Destaca el discriminante y establece los tipos de solución que tiene la ecuación, dependiendo del signo del discriminante.
    e) Escribe tres ejemplos de ecuaciones cuadráticas, una sin solución, otra con una solución y una más con dos soluciones.
    f) Explica por qué una ecuación cuadrática tiene dos soluciones cuando sus coeficientes cuadrático e independiente tienen signos contrarios.
    g) Explica cómo se puede saber, calculando el discriminante, si una ecuación cuadrática es o no factorizable.

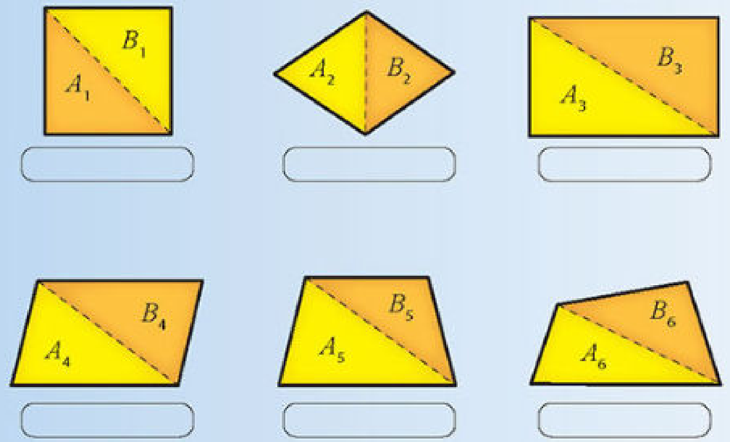
Figuras y cuerpos

Aplicación de los criterios de congruencia y semejanza de triángulos en la resolución de problemas

Reactivando el saber

Realicen lo que se indica a continuación.

1. Identifiquen cada una de las figuras escribiendo su nombre en la parte inferior; posteriormente, respondan lo que se solicita.



   a) ¿Son los triángulos A_1 y B_1 congruentes? _____ ¿Por qué?
   b) ¿Son los triángulos A_2 y B_2 congruentes? _____ ¿Por qué?
   c) ¿Son los triángulos A_3 y B_3 congruentes? _____ ¿Por qué?
   d) ¿Son los triángulos A_4 y B_4 congruentes? _____ ¿Por qué?
   e) ¿Son los triángulos A_5 y B_5 congruentes? _____ ¿Por qué?
   f) ¿Son los triángulos A_6 y B_6 congruentes? _____ ¿Por qué?
2. ¿Qué características debe tener un cuadrilátero para que los dos triángulos que se obtienen al trazar cualquiera de sus diagonales sean congruentes?
3. Describan cada uno de los criterios para saber si dos triángulos son semejantes.
   LLL ______
   LAL ______
   ALA ______
4. Cuando sea el caso, describan la transformación rígida que lleva A_1 en B_1, A_2 en B_2, A_3 en B_3, etcétera.

Bloque 3

Triángulos a partir de las medidas de sus lados

Reúnan el siguiente material y realicen lo que se solicita.

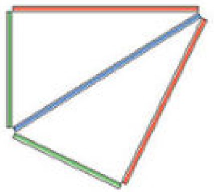
- 4 popotes de 6 cm de longitud
- 4 popotes de 8 cm de longitud
- 4 popotes de 10 cm de longitud
- Plastilina

1. Tomen popotes de cualquiera de estas longitudes y armen triángulos uniéndolos con la plastilina.
   a) Registren las medidas de los triángulos a partir de los popotes utilizados, para ello vayan girando en el sentido contrario al giro de las manecillas del reloj; por ejemplo: (10, 10, 10), (6, 8, 10), (6, 10, 8), etcétera.
   b) Identifiquen aquellos triángulos que resulten congruentes.
   c) Conserven sus triángulos para una actividad que realizarán más adelante.

   Noten que en este registro se pierde la información sobre los ángulos, y sólo se conservan las medidas de los lados y su orden. Sabemos que un triángulo queda completamente definido si se conocen las medidas de sus lados y sus ángulos.

   d) ¿Qué criterio de congruencia asegura, sin necesidad de conocer las medidas de sus ángulos, que usando nuestros popotes hemos construido triángulos congruentes?

Construye con popotes dos triángulos congruentes y realiza las siguientes actividades.



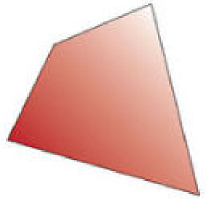
1. Une dos triángulos congruentes para formar un cuadrilátero. Compáralo con el de alguno de tus compañeros.
   a) ¿Todos resultaron diferentes?
   b) ¿Todos se obtuvieron de la misma forma?
2. Traza algunos de los cuadriláteros realizados con triángulos congruentes construidos por ti y tus compañeros.

   a) ¿Qué tienen en común todos los registros?
   b) ¿Cómo deben ser los lados de un cuadrilátero para que pueda dividirse en dos triángulos congruentes?

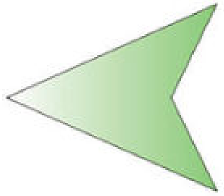
Considera un cuadrilátero $ABCD$ cuyos lados sean iguales dos a dos. Toma en cuenta los siguientes casos.

Caso 1: Los lados iguales son opuestos.

Caso 2: Los lados iguales son adyacentes.



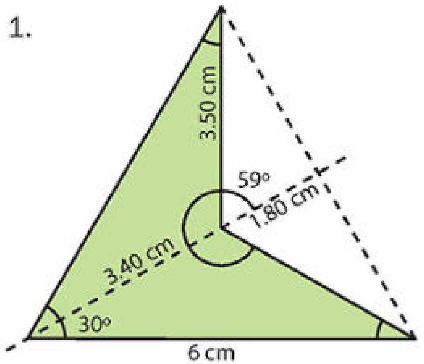
1. Traza las diagonales de los dos cuadriláteros anteriores.
   a) ¿Será posible en cualquiera de los casos dividir el cuadrilátero en dos triángulos congruentes?, ¿por qué?
   b) La diagonal divide al cuadrilátero en dos triángulos. ¿Qué criterio de congruencia asegura que los dos triángulos son congruentes?
   c) ¿En alguno de los dos casos es posible usar cualquiera de las dos diagonales para dividir el cuadrilátero en triángulos congruentes? Discute con tus compañeros y argumenta tu respuesta.
2. Observa la flecha que aparece a continuación.



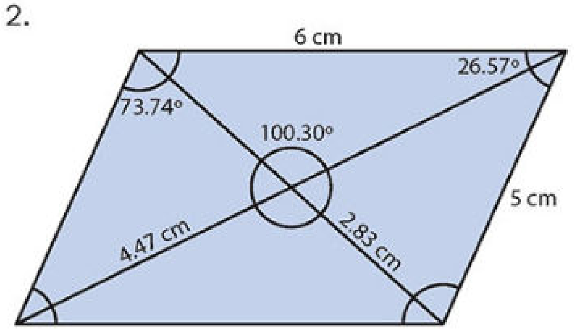
   a) Explica por qué es posible dividirla en triángulos congruentes al trazar una de sus diagonales.
3. ¿A qué se debe que en algunos cuadriláteros sólo se puede usar una diagonal para dividirlos en triángulos congruentes, mientras que en otros se deben trazar ambas?
4. Utiliza los criterios de congruencia para probar mediante argumentos lógicos que:
   a) En un papalote, una de sus diagonales es cortada por la otra en su punto medio.
   b) En un paralelogramo, ambas diagonales se cortan en sus puntos medios.

Observa los siguientes cuadriláteros, se sabe que sus lados son iguales dos a dos. Completa las medidas de todos los ángulos y los segmentos.

1.



2.



Matemáticas en el pasado

El matemático griego Euclides, quien vivió en el siglo III a.n.e., es famoso por sus trece libros conocidos como *Los Elementos*, en los que recopiló los conocimientos matemáticos que hasta entonces se tenían. En el libro 1, hay dos proposiciones relacionadas con la congruencia de triángulos.

La Proposición 4 afirma lo que actualmente se conoce como criterio de congruencia de triángulos *LAL* (lado, ángulo, lado).

La *Proposición 8* corresponde al criterio de congruencia de triángulos *LLL* (lado, lado, lado).

Posteriormente, Euclides demostró la Proposición 3: "Los lados y ángulos opuestos de un paralelogramo son iguales uno al otro y la diagonal divide el área en dos partes iguales".

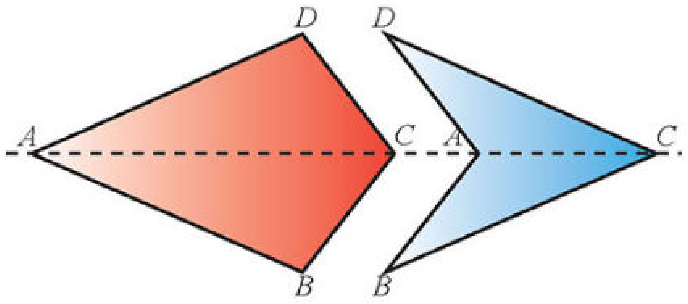
Resulta interesante notar que el método de Euclides era deductivo, es decir, no se basaba en "lo que se ve", sino en **axiomas**, nociones comunes y proposiciones, para demostrar mediante argumentos lógicos nuevas ideas que consideraba verdaderas. Este procedimiento deductivo garantiza que no se cometan errores de apreciación y toda la matemática moderna está basada en esta metodología que fue formalizada por Euclides hace 2 300 años.

Palabra Mu

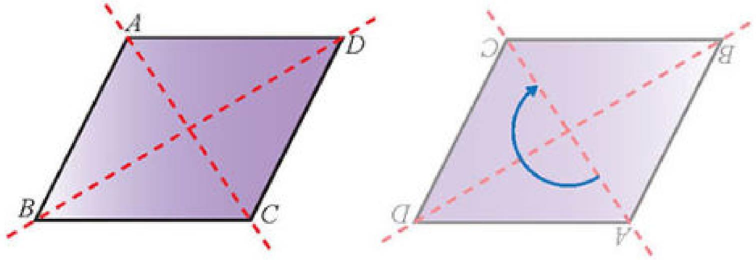
axioma. Enunciado que se acepta sin demostración.

Fuente: Pérez, Sergio, 2013.

Los cuadriláteros que pueden ser divididos en triángulos congruentes por sólo una de sus diagonales son los **deltoides**, esto ocurre debido a que una de sus diagonales es un eje de simetría. Los deltoides cóncavos, a los que denominaremos flechas, son un caso especial de ellos y los que parecen papalotes se denominan deltoides convexos.



En la figura de la derecha, como los lados de los triángulos ABC y ADC tanto en el deltoide convexo como en la flecha, son iguales ($AD = AB$, $BC = DC$ y $AC = AC$), sus ángulos internos son iguales y por lo tanto ambos triángulos son congruentes.



Los cuadriláteros que pueden ser divididos en triángulos congruentes por ambas diagonales son los paralelogramos (sus lados opuestos son iguales dos a dos, en los que se incluyen como casos especiales los rombos, rectángulos y cuadrados). Observa que si el paralelogramo se rota 180° tomando como centro el punto donde se cruzan las diagonales, cada una de éstas cae sobre sí misma, pero invirtiendo sus extremos.

Palabra Mu

deltoide. Cuadrilátero no regular cuyos lados contiguos son iguales dos a dos.

Bloque 3

Lo que se ha dicho de los deltoides para una de sus diagonales vale, en el caso de los paralelogramos, para cualquiera de ellas. Los lados son iguales ($AB = CD$, $BC = DA$, $BD = DB$, $AC = CA$), entonces los ángulos internos son iguales y por lo tanto los triángulos son iguales $ABC = CDA$ y $ABD = CDB$.

En general, ¿qué podemos decir si un cuadrilátero tiene lados iguales dos a dos?, ¿podrá ser dividido en triángulos congruentes?, ¿de qué figura se tratará?

Observa la imagen del deltoide formado por dos triángulos congruentes de la página 149 y realiza lo que se solicita.

a) Utiliza tus conocimientos para calcular las medidas de los cuatro lados del deltoide convexo.

b) Explica cómo pudiste averiguar cada una de las medidas.

El teorema de Pitágoras: *"En cualquier triángulo rectángulo, la suma de los cuadrados de los catetos es igual al cuadrado de la hipotenusa"*.

Muchos estudiantes recuerdan el teorema a partir de la fórmula: $a^2 + b^2 = c^2$; sin embargo, en este momento resulta importante hacer otra lectura del mismo: "si se tiene un triángulo y se conocen las medidas de dos de sus lados y del ángulo que forman, es posible calcular la medida del tercer lado mediante una fórmula sencilla".

Este teorema es un caso particular de una serie de enunciados matemáticos que aseguran que no se necesitan las seis medidas (tres lados y tres ángulos) para determinar completamente un triángulo. Así, es necesario que uno de los ángulos sea recto, pero en general, es posible conocer a partir de tres medidas cualesquiera, las tres restantes.

Construyendo Matemáticas

Criterios de semejanza de triángulos

Reúnan el siguiente material y realicen lo que se solicita.

- 4 popotes de 9 cm de longitud
- 4 popotes de 18 cm de longitud (pueden unir dos de 9 cm para obtener este largo)
- 4 popotes de 15 cm de longitud
- Plastilina

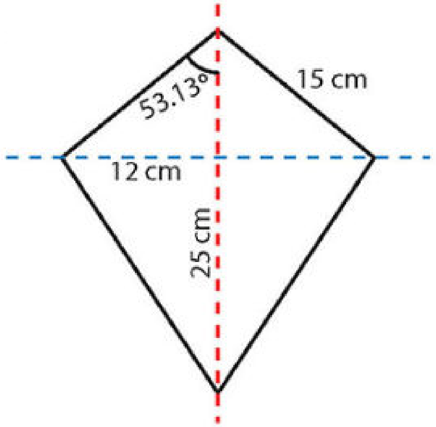
1. Recuperen los triángulos que crearon anteriormente.
2. Utilicen los nuevos popotes para crear copias a escala de los triángulos que hicieron.
   a) ¿Resultó posible hacerlo?
   b) ¿Cómo podrían asegurar que se trata de figuras semejantes a las que hicieron originalmente?
   c) Identifiquen los triángulos que consideren que son semejantes y elijan una pareja. Analicen las razones entre los lados de cada triángulo de la pareja, dividiendo las medidas de los lados. Recuerden que el cociente $\frac{AB}{BC}$ es la razón resultante de comparar los lados AB y BC.
   d) Anoten las razones de los lados de los triángulos ABC y $A'B'C'$ que eligieron.

   $\frac{AB}{BC} =$ $\qquad$ $\frac{BC}{CD} =$ $\qquad$ $\frac{CD}{AB} =$

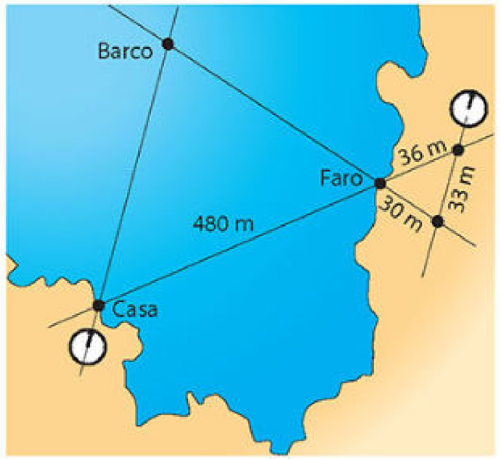
   $\frac{A'B'}{B'C'} =$ $\qquad$ $\frac{B'C'}{C'D'} =$ $\qquad$ $\frac{C'D'}{A'B'} =$

   e) ¿Cómo son las razones de los lados de uno de los triángulos en relación con las razones de los lados del otro?
   f) ¿Podrían asegurar ahora que se trata de triángulos semejantes?, ¿por qué?
   g) Expliquen por qué AAA no es un criterio de congruencia de triángulos.

Analiza y resuelve los siguientes problemas.



1. Prueba, mediante las razones de los lados, que los triángulos grandes y pequeños de la imagen son semejantes, y escribe las medidas faltantes de todos los lados y ángulos del deltoide.
   a) Demuestra, a partir de las medidas que calculaste, que el cuadrilátero de la imagen tiene dos ángulos rectos.

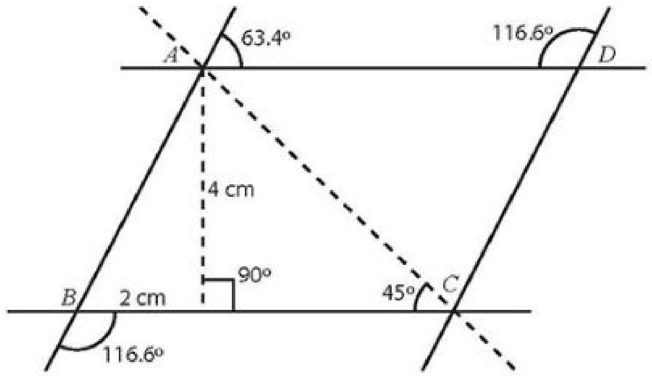


2. El asta de la escuela proyecta una sombra de 2.6 m. Juan mide 1.8 m y proyecta una sombra de 1.2 m. ¿Cuánto mide el asta? Elabora un dibujo con triángulos semejantes para que justifiques tu respuesta.

3. Un pescador ve un barco desde su casa y utiliza el faro y una brújula para crear un sistema de triángulos semejantes, tal como se observa en la imagen. ¿A qué distancia de la casa del pescador y del faro se encuentra el barco?

Bloque 3

4. Argumenta por qué los triángulos que se forman en la imagen son congruentes. Escribe todas las medidas faltantes.



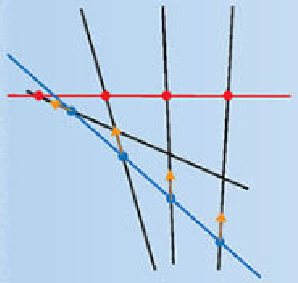
5. Piensa en un problema que se pueda resolver usando semejanza y/o congruencia de triángulos. Redáctalo, ilústralo y resuélvelo argumentando cuidadosamente tus resultados.

Reactivando el saber

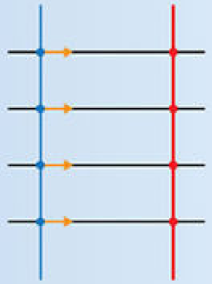
La semana pasada, durante una excursión familiar, decidimos hacer un paseo en kayak, una embarcación usada para realizar recorridos en línea recta. Tomé una brújula mientras mi hermano remaba. Después de un rato, mi hermano dijo: "aunque en este kayak sólo estoy remando yo, vamos bastante más rápido que aquellos dos que reman juntos", refiriéndose a otra embarcación. Con sólo observar la brújula me percaté de que nuestra embarcación chocaría contra la otra; de pronto sucedió lo inevitable: algunos gritos, instrucciones cruzadas, intentos por frenar las embarcaciones o cambiar de dirección.

La dirección que marcaba la brújula al mirar hacia la otra embarcación debería cambiar conforme nos movíamos ya que había dos posibilidades: a) nos estábamos moviendo a la misma velocidad sobre rectas paralelas, o b) nos estábamos moviendo sobre dos rectas que se cortarían y las velocidades de ambas embarcaciones eran tales que pasaríamos por ese punto al mismo tiempo. ¿Sabes qué significaba eso?

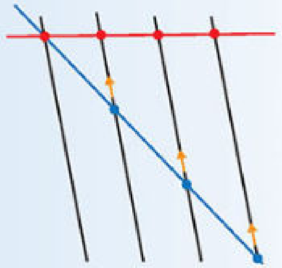
A continuación, se muestra cómo deduje, con el trazo de tres dibujos, las posibles situaciones. En ellos, los puntos azules representan a nuestro kayak en diferentes momentos, y los rojos al kayak que terminó volteado; las flechas amarillas indican la dirección señalada por la brújula a cada instante.



Situación 1



Situación 2



Situación 3

Observa los trazos del protagonista de la historia y responde las siguientes preguntas.

1. ¿En cuál situación la colisión es inminente? Justifica tu respuesta.
2. ¿En alguna situación no chocarán las embarcaciones? Explica por qué podría suceder esto.
3. ¿En cuál de las tres situaciones no hay líneas paralelas?

Realiza lo que se indica a continuación.

Un carpintero tiene una tabla de madera y quiere dividirla en 7 segmentos iguales para hacer un librero.

a) Corta una tira de papel, no importan las medidas, pero debe ser un rectángulo a fin de que represente la tabla del carpintero.

b) Divide el rectángulo a lo largo en 7 partes iguales. El reto es hacerlo sin doblarla ni medirla.

Responde lo que se solicita.

Bloque 3

1. Explica con tus propias palabras y a detalle qué entiendes por una *familia* de rectas paralelas.

   a) ¿Cuántas rectas es necesario trazar para definir una familia de rectas paralelas?

   b) ¿Cuántos integrantes conforman a toda una familia de rectas paralelas?

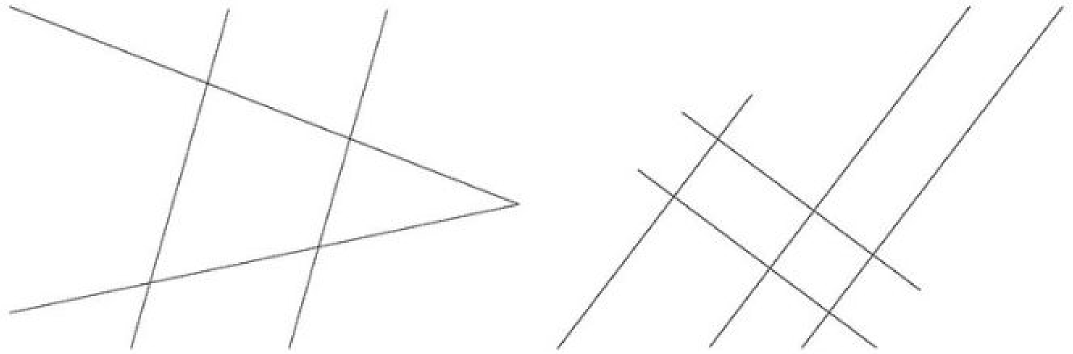
2. En los siguientes enunciados, cuando hablen de una familia de rectas paralelas que cortan a dos rectas, (aunque no lo digan en forma explícita), y esas dos rectas cumplan una condición, identifica cuál es ésta, marcándola con una ✓.

   - Ambas rectas deben ser paralelas entre sí.
   - Ambas rectas deben tener pendientes distintas.
   - Ambas rectas deben ser distintas.
   - Las rectas deben ser paralelas al menos a alguna de las rectas de la familia.
   - Al menos una de las rectas debe ser paralela a la familia.
   - Ambas rectas deben tener la misma pendiente y ésta debe ser distinta a la de la familia.
   - Al menos una de las rectas debe ser perpendicular a la familia.
   - Ninguna debe pertenecer a la familia de paralelas.

Recuerda que para hablar de proporcionalidad es necesario tener al menos cuatro cantidades; en este caso son las longitudes de los segmentos que se obtienen al cortar dos rectas mediante una familia de paralelas.

Realicen las siguientes actividades.

1. Observen las imágenes y respondan.



   a) ¿Cuántas rectas de una familia de paralelas son necesarias para generar cuatro segmentos sobre otras dos rectas?

2. Identifiquen en las siguientes imágenes las situaciones en las que puede aplicarse el teorema de Tales y márquenlas con una ✓.

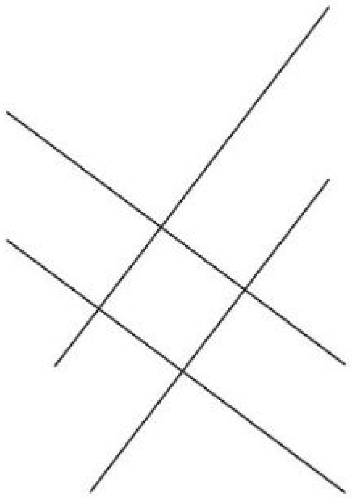


Figura 1

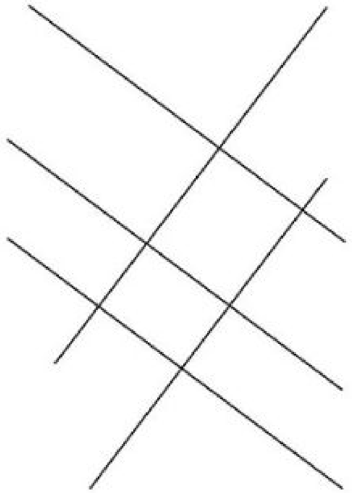


Figura 2

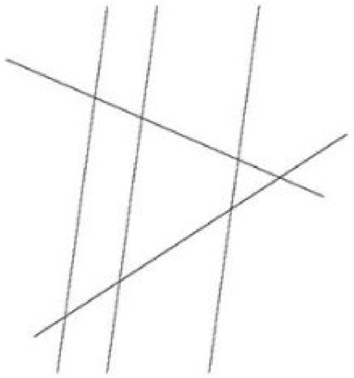


Figura 3

Construyendo Matemáticas

Teorema de Tales

Sigue cuidadosamente los pasos que se describen a continuación, realiza los trazos en tu cuaderno.

a) Traza dos rectas distintas cualesquiera y llámalas r y s, respectivamente.

b) Traza una recta l que corte a r y s.

c) Traza dos rectas m y n que pertenezcan a la familia de rectas paralelas determinada por l.

d) Asegúrate de escribir junto a cada una de las rectas la letra que la identifica.

Comparen sus trazos con los de sus compañeros.

a) ¿Qué tienen en común sus trazos?

b) ¿Cómo son las rectas l, m, y n?

Ubica y nombra los siguientes puntos en los trazos que hiciste en tu cuaderno.

a) Nombra A al punto donde se cortan r y l.

b) Denomina B al punto donde se cortan r y m.

c) Nombra C al punto donde se cortan r y n.

d) Designa A' al punto donde se cortan s y l.

e) Llama B' al punto donde se cortan s y m.

f) Denomina C' al punto donde se cortan s y n.

1. Analiza tus trazos y resuelve lo siguiente:

   a) Si en tu construcción las rectas r y s se cortan entre sí, llama O al punto donde lo hacen; si no ¿a qué se debe?, ¿si las prolongaras se cruzarían? Justifica tu respuesta.

   b) ¿Algunos de tus puntos coinciden? Si es así, identifícalos con las letras que correspondan.

2. Mide cuidadosamente los segmentos y regístralos en una tabla en tu cuaderno.

   a) Calcula los cocientes y regístralos.

3. Compara tus cocientes, ¿algunos son iguales a otros? Verifica con tus compañeros si esto sucede en sus trazos.

Comenten con sus compañeros y profesor respondiendo lo siguiente.

a) Desde su experiencia, ¿en qué creen que consiste el teorema de Tales?

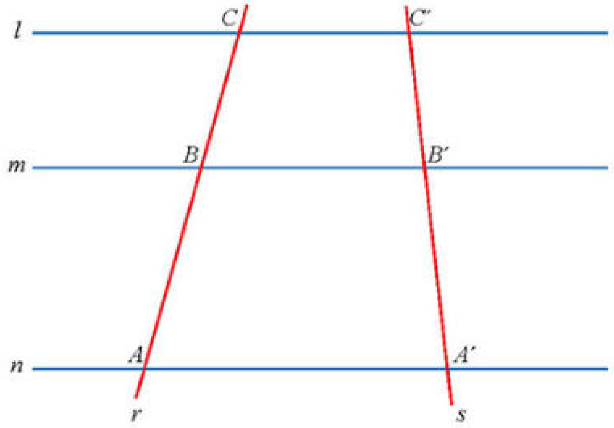
b) ¿Están convencidos de que el teorema de Tales funcionará siempre?

Bloque 3

Realicen la siguiente actividad.

Las actividades anteriores se llevaron a cabo para convencer a tu intuición, pero de ninguna manera son una demostración de que efectivamente el teorema de Tales siempre sea válido, para ello debemos recurrir a la lógica y a enunciados que ya sabemos que son válidos (definiciones, postulados o teoremas). Una vez que demostremos mediante el siguiente procedimiento que el enunciado de Tales funcionará siempre, entonces podremos llamarlo teorema de Tales.

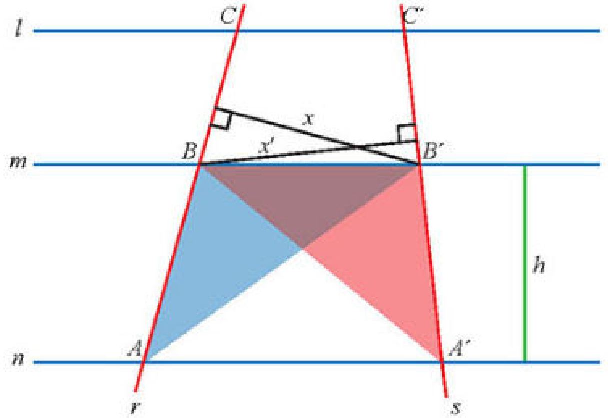
1. Observen su construcción y compárenla con la que aparece a continuación.



En ella se encuentran los elementos que deben aparecer en las construcciones de todo el grupo: las rectas l, m, n, r, s, y los puntos A, B, C, $A´$, $B´$, $C´$.

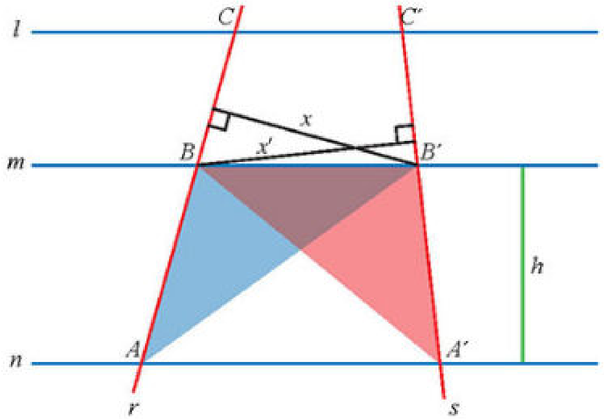
La utilizaremos para ilustrar un procedimiento lógico que nos permitirá demostrar el teorema.

a) Trazaremos en el esquema dos triángulos $BB´A$ y $BB´A´$ cuya base es $BB´$ y su altura h es la distancia de m a n.



- El área del triángulo anaranjado es $A = \frac{\overline{BB´}h}{2}$, y el área del triángulo azul es también $A = \frac{\overline{BB´}h}{2}$. Es claro que las áreas son iguales.

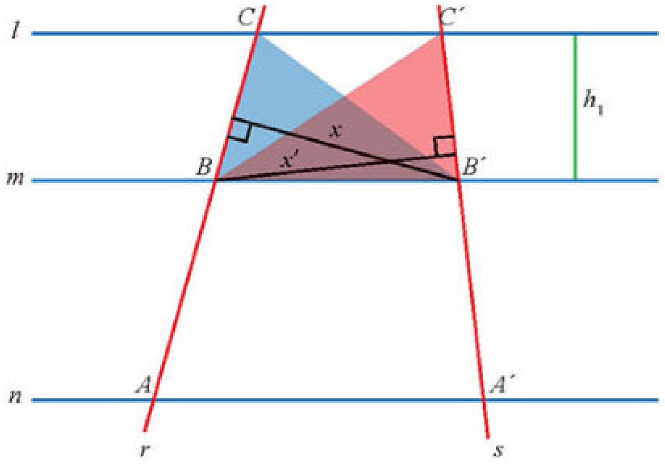
b) Si tomamos la base $A´B´$ para el triángulo anaranjado y AB para el triángulo azul, y sus correspondientes alturas $x´$ (distancia de B a s) y x (distancia de $B´$ a r),



obtenemos que el área del triángulo anaranjado es $A = \frac{\overline{A´B´}x´}{2}$ y el área del triángulo azul es $A = \frac{\overline{AB}x}{2}$, pero sabemos que ambas áreas son iguales, por lo tanto $A = \frac{\overline{A´B´}x´}{2} = \frac{\overline{AB}x}{2}$.

Esta relación se puede llevar fácilmente a: $\frac{x´}{x´} = \frac{\overline{AB}}{\overline{A´B´}}$.

c) Si sobre la misma construcción repetimos el procedimiento para los triángulos $BB´C$ y $BB´C´$,



obtendremos que: $A = \frac{\overline{B´C´}x´}{2} = \frac{\overline{BC}x}{2}$, esto nos permitirá concluir que: $\frac{x´}{x} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B´C´}}$.

Pero por la construcción anterior tenemos que: $\frac{\overline{BC}}{\overline{B´C´}} = \frac{x´}{x} = \frac{\overline{AB}}{\overline{A´B´}}$.

Con el mismo procedimiento podríamos demostrar que: $\frac{\overline{AC}}{\overline{A´C´}} = \frac{y´}{y} = \frac{\overline{AB}}{\overline{A´B´}}$, y la consecuencia inmediata sería que: $\frac{\overline{AC}}{\overline{A´C´}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{A´B´}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B´C´}}$.

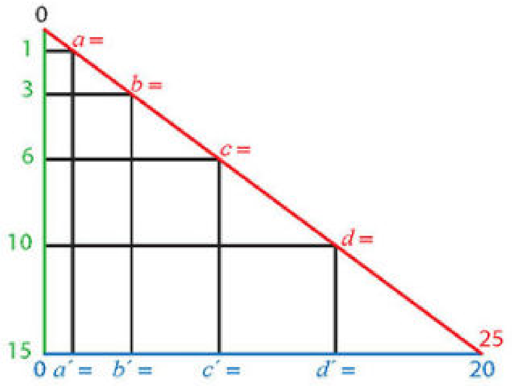
d) Observa que para esta demostración hemos usado una argumentación lógica y no dependimos de los trazos más que para ilustrar el procedimiento, pues desde el principio establecimos claramente cuál era la relación entre las rectas y los puntos.

La demostración es válida sin tomar información adicional de los trazos, pero usamos el hecho de que "dos triángulos distintos que comparten una base y altura tienen la misma área", y otros hechos como que "dos rectas paralelas conservan la distancia entre sí", o bien, que "la distancia entre un punto y una recta es única y está determinada por la longitud del segmento perpendicular a la recta que pasa por dicho punto", y que "la distancia entre dos rectas paralelas es la distancia entre una de las rectas y un punto cualquiera que pertenece a la otra". Estos enunciados son los que nos han permitido hacer la demostración.

Repitan la argumentación realizando las construcciones adecuadas para demostrar que: $\frac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}} = \frac{y'}{y} = \frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}}$.

Detrás del hecho de que al trazar paralelas a los lados de los triángulos se obtengan triángulos semejantes se halla el teorema de Tales.

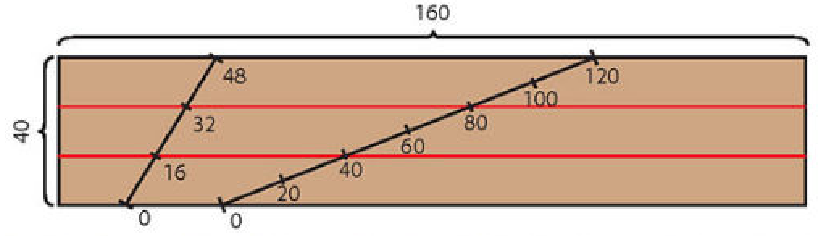
Analiza el siguiente problema de proporcionalidad y encuentra los valores que corresponden a las letras a, b, c, que son longitudes medidas sobre la línea roja, y a', b', c', que corresponden a las longitudes medidas sobre la línea azul.



Explica con tus propias palabras en qué consiste el teorema de Tales. Menciona dos ejemplos en los que podrías aplicar dicho teorema.

Los carpinteros usan el teorema de Tales

Supón que un carpintero quiere dividir en tres tiras iguales una tabla que mide 40 cm de ancho por 160 cm de largo. En lugar de dividir 40 ÷ 3, coloca la cinta métrica en diagonal a lo largo de la tabla, comenzando en una paralela y terminando en la otra, cuidando que la medida obtenida sea un múltiplo de 3; después divide esa medida entre 3 y marca los puntos encontrados sobre las rectas que dividen a la tabla en tres tiras. En la imagen se muestran dos ejemplos en los que se ha hecho esto.



Con la finalidad de que relaciones el procedimiento del carpintero con el teorema de Tales, realiza la siguiente actividad.

1. Recorta tres tiras de cartón con una longitud de 13.3 cm cada una. Etiquétalas como A, B y C.

Se eligió esta medida de 13.3 cm porque no es sencillo determinar por métodos numéricos los puntos en los que se deben marcar las tiras para dividirlas en partes iguales, pongamos un ejemplo: Para dividir en 5 partes iguales hay que colocar marcas en los centímetros 2.66, 5.32, 7.98 y 10.64, respectivamente; el problema es que las reglas comunes no tienen la suficiente precisión para realizar las mediciones. ¿Cómo nos puede ayudar el teorema de Tales para resolver este problema?

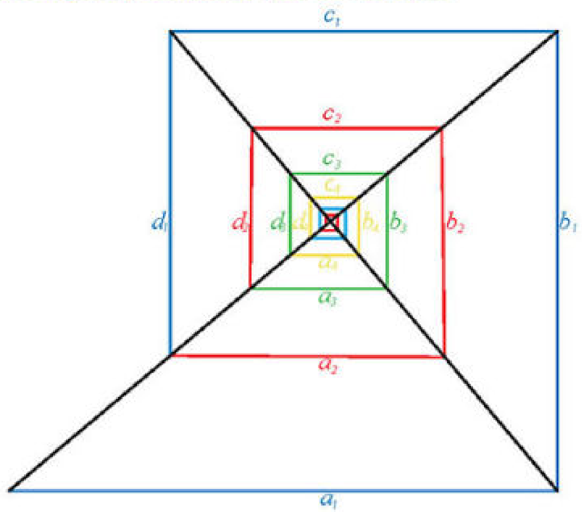
a) Divide la tira A en 5 partes iguales

b) Divide la tira B en 9 partes iguales

c) Divide la tira C en partes proporcionales a 1, 2 y 4

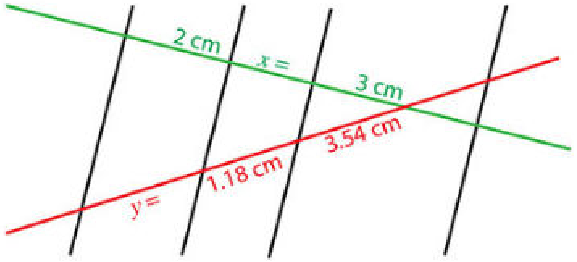
d) ¿Cuál fue la utilidad del teorema de Tales? ¿Cómo lo aplicaste?

Observa la siguiente figura y realiza lo que se solicita.

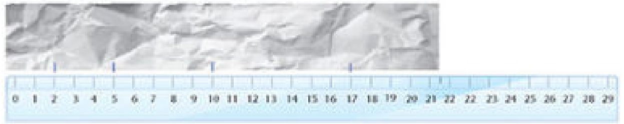


1. Encuentra las diferentes relaciones entre los cocientes.
   a) Compara los cocientes sucesivos, $\frac{a_1}{a_2}$, $\frac{a_2}{a_3}$, $\frac{a_3}{a_4}$, etcétera.
   b) Compara los cocientes $\frac{a_1}{b_1}$, $\frac{b_1}{c_1}$, $\frac{c_1}{d_1}$, etcétera.
   c) Compara otros cocientes como $\frac{a_1}{c_1}$, $\frac{c_1}{d_1}$.
2. Explica y comenta con tus compañeros las conclusiones a las que has llegado.

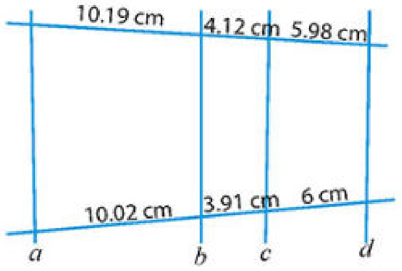
Respondan y justifiquen los siguientes planteamientos.



1. Sabiendo que se cumplen las condiciones del teorema de Tales, calculen los valores de x y y.
2. Dividan una tira de papel de 21.59 cm (el ancho de una hoja tamaño carta) en segmentos proporcionales a 2 + 3 + 5 + 7, tal como se observa en la imagen. Utilicen para ello el teorema de Tales.



3. ¿Las rectas a, b, c, d son paralelas? Argumenten su respuesta con el teorema de Tales.



4. En la capital de la República mexicana, sobre la avenida Paseo de la Reforma, se encuentra el monumento a Cuauhtémoc, último tlatoani mexica. Cierta tarde, una estudiante cuya altura es de 1.70 m, se situó a pocos metros del monumento y midió su propia sombra, cuya longitud fue de 1.45 m. En ese mismo momento, el monumento proyectaba una sombra de 4.24 m. ¿Cuánto mide la altura del monumento a Cuauhtémoc?

5. Utiliza esta idea y elige un monumento o sitio alto del lugar donde vives. Recuerda que la sombra debe medirse desde el pie de la altura; es decir, desde el punto que se encuentra justo debajo del punto más alto del monumento. ¿Qué elegiste medir? ¿Cuánto mide su altura usando este procedimiento?

Aplicación de la semejanza en la construcción de figuras homotéticas

Reactivando el saber

Misma forma y diferente tamaño

Reflexiona en torno a la situación que se describe a continuación y responde lo que se solicita.

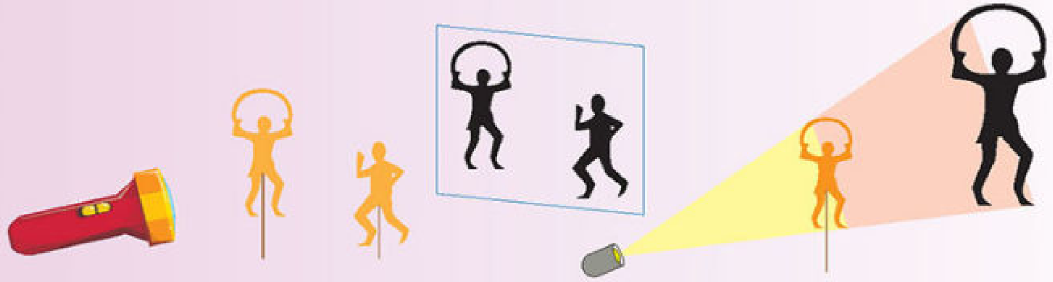
Por la mañana muy temprano, las sombras de los caminantes se extienden hacia el poniente; conforme el día avanza y el Sol parece viajar sobre el horizonte, las sombras se vuelven más y más pequeñas hasta que casi desaparecen bajo los pies; por la tarde, las sombras nuevamente son largas y parecen fugarse hacia el oriente.

¿A qué se debe que el tamaño de las sombras cambie?, ¿qué relación tiene esto con los temas que has estudiado en este libro?

Construyendo Matemáticas

Realiza lo que se solicita a continuación.

1. Consigue una linterna y realiza con ella el siguiente experimento.
2. Construye un par de títeres de sombra y utiliza la linterna para proyectarlos sobre la pared, tal como se muestra en la imagen.
   a) Observa la sombra. Mantén la linterna y las figuras sobre una línea perpendicular a la pared.
   b) Intenta alejar y acercar a la pared cada una de las figuras, juega con la distancia.
   c) Acerca y aleja la fuente de luz.
   d) Observa el tamaño y la forma. ¿Qué ocurrirá con el tamaño de la sombra si el foco se aleja de la figura original?
   e) ¿Qué debes hacer si quieres que la sombra tenga el triple de tamaño que la figura original?



3. Discute tus conclusiones con tus compañeros en torno a lo que observaron.

Bloque 3

Utilizando las ideas de la actividad anterior, juega con una sola figura y proyéctala sobre la pared u otra superficie; mantén fijas la linterna, la figura y la superficie. Realiza lo que se pide a continuación.

a) Mide la distancia entre el foco y la figura, y entre el foco y la superficie donde se proyecta la sombra.

b) Mide la altura de la figura original y la altura de su sombra.

c) Indica el papel que juega la semejanza de triángulos en este experimento.

d) Explica lo que ocurre cuando modificas las distancias entre el foco, la figura original y la superficie donde se proyecta la sombra.

e) ¿Cómo se relacionan las distancias entre el foco y cada una de las figuras con el factor de amplificación de la sombra respecto al original?

f) Si tuvieras la figura original y su imagen pero no supieras dónde se encuentra el foco, ¿qué deberías hacer para averiguar su posición?

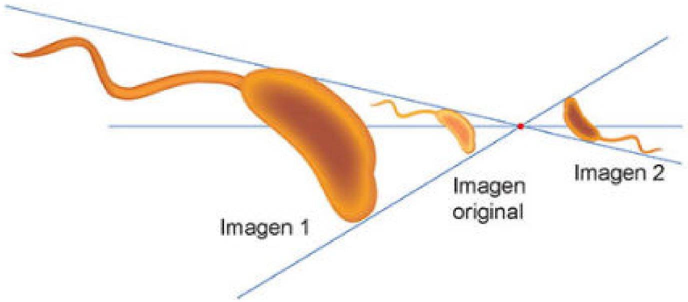
- Recuerda que lo importante de responder estas preguntas es que pienses y registres tus reflexiones sobre las ideas con las que estás trabajando.

Palabra Mu

homotecia. Es la transformación que tiene una figura cuando se reduce, amplía o reproduce.

Hasta ahora, hemos estudiado un tipo de transformaciones sobre el plano, a las que hemos denominado transformaciones rígidas, éstas no alteran el tamaño de las figuras ni su forma. A continuación estudiaremos otras que llamaremos **homotecias**.

Analiza el siguiente texto y observa la ilustración. En ella puedes encontrar no una, sino dos homotecias.



Los bacterias son microorganismos unicelulares sin núcleo, con tamaños de entre 0.5 y 7 micrómetros de longitud. Aunque se saca provecho de ellas para obtener alimentos, medicamentos o diversos usos en la industria, algunas son causantes de enfermedades. Gracias a los microscopios es posible verlas cuando se encuentran agrupadas en colonias. Al observarlas tenemos un ejemplo claro de la homotecia, ya que este aparato aumenta el tamaño aparente. A continuación se muestra una imagen de la bacteria del cólera. Obsérvala y responde las preguntas.

a) Explica cuidadosamente la diferencia entre la homotecia que transforma la imagen original en la imagen 1 y la homotecia que transforma la imagen original en la imagen 2.

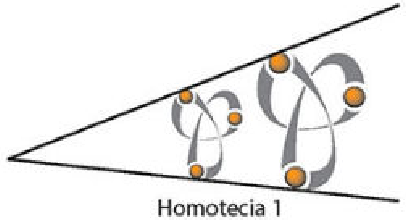
b) ¿Qué hace la homotecia 1?

c) ¿Qué hace la homotecia 2?

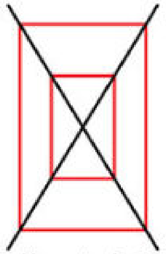
d) ¿Qué tienen en común ambas homotecias?

Una homotecia está relacionada con un número al que llamamos razón, la cual no es más que la relación de proporcionalidad que determina el tamaño de la imagen respecto al original.

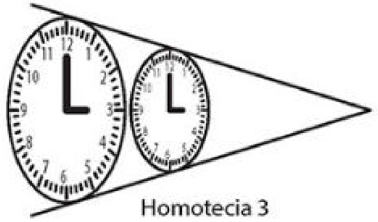
Midan las distancias necesarias en las siguientes homotecias y traten de averiguar cuál es la razón en cada una. Apóyense en el concepto de triángulos semejantes.



Homotecia 1



Homotecia 2



Homotecia 3

a) ¿Cuál es la razón de proporcionalidad en cada una de las homotecias?

b) En estas tres homotecias, ¿es claro cuál de las figuras es la original y cuál es la imagen?

c) Si en la homotecia 1 se toma como original a la figura pequeña, ¿la razón será la misma que si se toma como original a la grande? ¿Cómo se relacionan estas razones?

d) Expliquen cómo se determina la razón en una homotecia cualquiera.

Matemáticas en el pasado

Una cámara estenopeica es un dispositivo óptico que consiste en una caja oscura con un pequeño agujero en una de sus paredes. Con el paso del tiempo, este instrumento fue evolucionando hasta convertirse en cámaras fotográficas, que tuvieron su auge en el siglo xx.

Ibn al-Haytam, también conocido como Alhazen, nació alrededor del año 965 de n.e. (nuestra era) en el territorio que hoy corresponde a Irak. Podría decirse que él es "el padre de la óptica moderna", ya que explicó importantes fenómenos relacionados con la luz y la formación de imágenes. Propuso que la luz viaja en forma de rayos rectilíneos. Fue el primero en mencionar la propiedad fundamental de que la imagen proyectada al fondo de la cámara no es más que una inversión de la original que se encuentra del otro lado del agujero.

Aparte de las peculiaridades físicas relativas a la naturaleza de la luz, el principio geométrico básico en la cámara estenopeica es precisamente la homotecia, pues como líneas rectas que convergen en un punto, los rayos de luz forman sobre la pantalla una imagen invertida de la original.

Fuente: Pérez Máximo y Pérez Sergio, 2013.

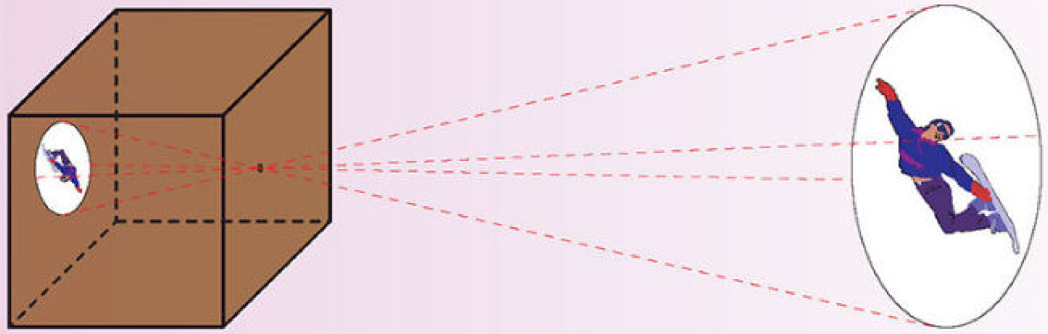
Construyendo Matemáticas

Construye una cámara estenopeica

Para ello necesitarás:

- Una caja pequeña de cartón
- Un alfiler
- Pintura o papel oscuro
- Papel cebolla o papel china blanco

Observa la siguiente ilustración.



1. Pinta de negro la caja de cartón o fórrala de tal manera que quede totalmente oscura por dentro.
2. Con el alfiler haz un orificio en una de sus caras.
3. En la cara opuesta a la que tiene el orificio recorta una ventana pequeña y cúbrela con papel cebolla o china.
4. Apunta el orificio hacia una imagen luminosa y observa lo que ocurre en la ventana con papel cebolla. Si es necesario, cubre tu cabeza y la caja con una tela oscura para evitar que la luz de alrededor contamine la imagen.

   a) ¿Qué ocurre con la imagen de la ventana cubierta con papel?

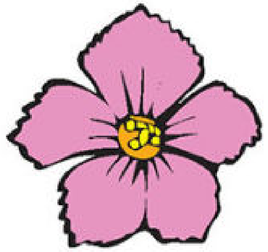
   b) ¿Se trata de una homotecia?

   c) De ser así, ¿cuál será la razón de esto?

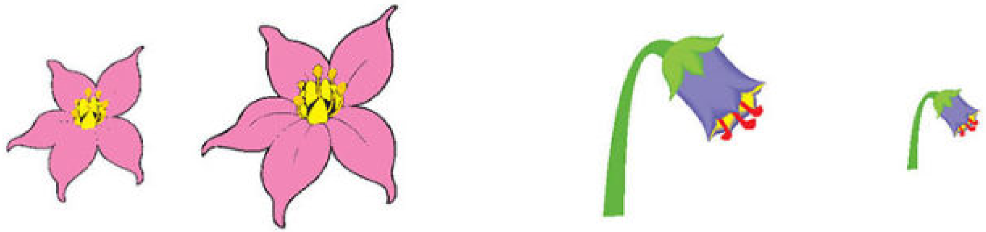
Hemos dicho que la homotecia no es una transformación rígida, pues conserva la forma pero aumenta o disminuye el tamaño con la razón de proporcionalidad. Recuerda que para calcular la razón de una homotecia debes establecer cuál de las figuras es la original y cuál es la imagen.

En los siguientes problemas, pon especial atención en la posición relativa del foco (o centro de la homotecia) con respecto a la figura original y a la imagen. Utiliza lo que sabes sobre triángulos semejantes para determinar las medidas y las razones necesarias.

1. Define una homotecia que multiplique todas las distancias de la figura original por 2.5.



2. Determina la razón en cada una de las homotecias.



3. A la figura original se le han aplicado tres homotecias diferentes, determina el centro de cada una.

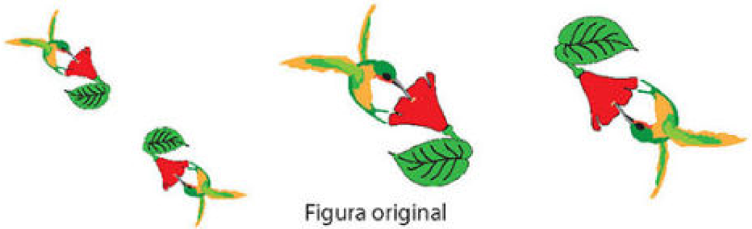


Figura original

Como seguramente habrás notado, existen homotecias que conservan la orientación de las figuras y también otras que las invierten.

Analiza y responde los siguientes cuestionamientos.

a) Si la razón de una homotecia que duplica el tamaño de la figura original conservando la orientación es 2, ¿cuál será la razón en una homotecia que duplica el tamaño pero invierte la orientación?

b) ¿Cuál será la razón en una homotecia que conserva el tamaño pero invierte la orientación?

c) Explica cuál es la diferencia entre una homotecia con razón positiva y una con razón negativa.

Bloque 3

A partir de sus observaciones de lo que ocurre con la imagen que se forma en la pantalla de su cámara estenopeica y sus reflexiones, realicen lo que se indica a continuación.

1. Con la información que tienen ahora, revisen sus respuestas acerca de la razón de la homotecia en la actividad de la cámara.
   a) ¿A qué se debe el efecto ocurrido en la cámara?
   b) ¿Qué sucedería con la imagen de la guitarra de la derecha si aumentaran la distancia entre la pantalla y el agujero?
   c) ¿Se les ocurre alguna idea que les permita crear una caja negra que genere una homotecia cuya razón se encuentre entre 0 y 1 y entre 1 y 1.5? Justifiquen sus respuestas.
   d) ¿Qué significado tiene realizar una homotecia con razón cero?
   e) Expliquen el resultado de realizar una homotecia cuya razón sea k.
   f) Indiquen el resultado de realizar una homotecia cuya razón sea $-k$. ¿Dónde se localiza esta homotecia?

Elaboren una definición de homotecia. Tomen en cuenta que es posible considerar tanto homotecias con razón positiva como las de razón negativa; destaquen el papel que juega el punto llamado "centro de la homotecia".

Definición de homotecia.

En grupo, compartan y analicen sus definiciones.

Una homotecia es una transformación plana que no cambia la forma pero sí el tamaño de las figuras. Para determinarla es necesario definir un punto llamado centro y una razón. Una vez definidos estos parámetros, para localizar la imagen de cada punto de la figura original será suficiente con trazar una recta que pase por dicho punto y por el centro de la homotecia. La imagen del punto debe localizarse sobre la recta, y su distancia al centro debe obtenerse multiplicando la razón por la distancia original. Una homotecia puede tener razón positiva o negativa, entendiendo por una homotecia negativa que la imagen se encuentra invertida con respecto al centro.

Casos especiales de la homotecia

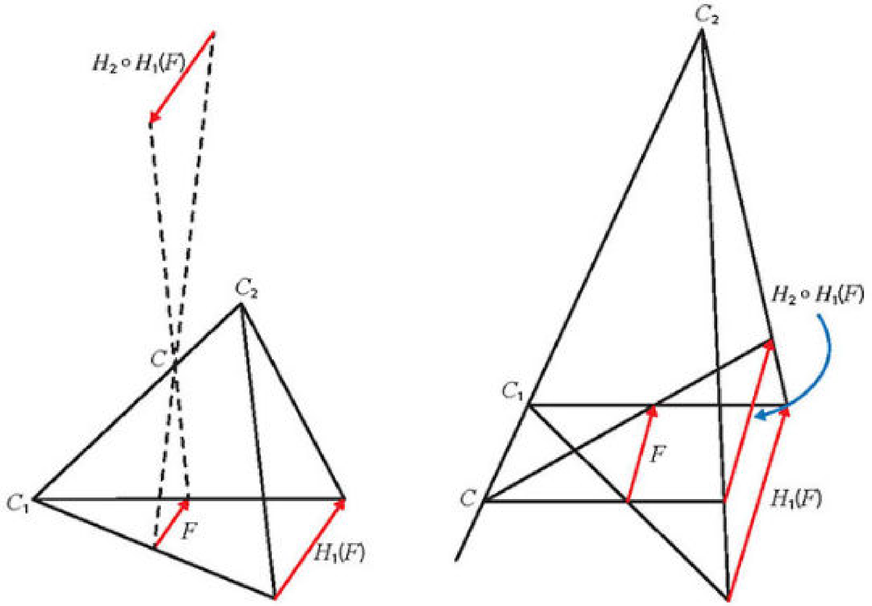
a) Si el valor absoluto de la razón es mayor que 1, la imagen es mayor que la figura original.
b) Si el valor absoluto de la razón es menor que 1, la imagen es menor que la figura original.
c) Si la razón es negativa, la imagen se encuentra invertida con respecto al centro.
d) Si la razón es 1, la imagen de la homotecia es exactamente igual a la figura original.
e) Si la razón es -1, la imagen de la homotecia es del mismo tamaño que el de la figura original pero se encuentra invertida con respecto al centro.
f) Si la razón es cero, la imagen de la homotecia se colapsa completamente en el centro.

Composición de homotecias

Realiza en tu cuaderno los siguientes ejercicios.

1. Elabora un dibujo sencillo y aplícale una homotecia con razón 1.5; a la figura resultante aplícale una homotecia con razón 2.
2. Realiza un dibujo sencillo y aplícale una homotecia con razón -1.5; en la imagen resultante aplica una homotecia con razón 2.
3. Haz un dibujo sencillo y aplícale una homotecia con razón -1.5; al dibujo resultante aplícale una homotecia con razón -2.
   a) Con base en los ejercicios anteriores, explica lo que ocurre cuando se aplica una homotecia seguida de otra.
   b) ¿Cuál sería la razón de la homotecia resultante de una composición de homotecias con razones 3 y -1?
   c) ¿Cuál sería la razón de la homotecia resultante de una composición de homotecias con razones a y b?
   d) ¿Cómo se relaciona el centro de la homotecia resultante con los de las homotecias originales?
   e) Indica cuáles son las propiedades que cambian y cuáles las invariantes (es decir, que no cambian) de las figuras planas al aplicarles una homotecia o una composición de homotecias.

Cuando a una figura F se le aplica una homotecia H_1 con razón r_1 y centro en C_1, y a la imagen resultante se le aplica una homotecia H_2 con razón r_2 y centro en C_2, se dice que se ha aplicado una composición de homotecias. La imagen resultante es una homotecia $H = H_2 \circ H_1$ de la figura original, donde el símbolo $\circ$ representa la composición, y la razón de la imagen es $r = r_2 \times r_1$, o sea el producto de las razones de las homotecias. Observa la imagen.

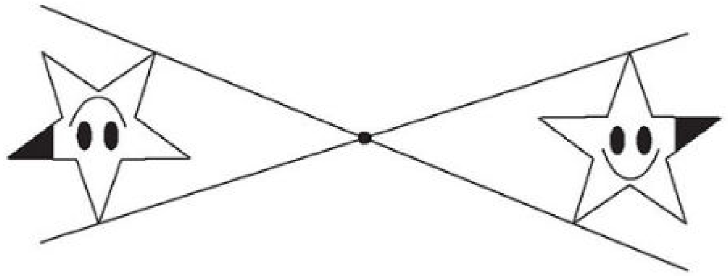


El centro C se encuentra sobre la recta definida por C_1 y C_2, pudiendo estar dentro o fuera del segmento $C_1 C_2$.

Homotecia y propiedades invariantes

Sobre el siguiente esquema traza y escribe lo que necesites para explicar el concepto de homotecia.

a) Ubica el centro
b) Define sobre el esquema el concepto de razón
c) Explica el significado del número que representa la razón de la homotecia
d) Determina qué cambia y qué no al transformar la figura original mediante una homotecia



Manejo de la información

Proporcionalidad y funciones

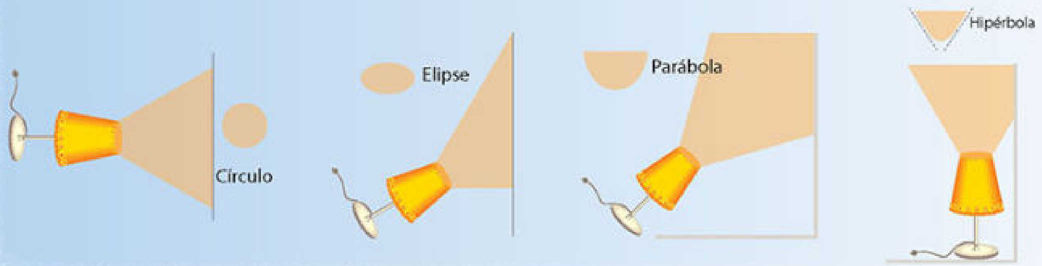
Lectura y construcción de gráficas de funciones cuadráticas para modelar diversas situaciones o fenómenos

Reactivando el saber

Parábolas a la vista

Observa las ilustraciones y responde lo que se solicita.

¿Dónde las has visto? Sin duda, en el futbol, en las fuentes, en las manchas de luz que forman las lámparas o en las antenas que captan señales lejanas. Observa:



Realiza la siguiente actividad.

1. Accede al siguiente sitio de internet: http://www.educaplus.org/movi/4_3tparabolico.html. Observa cómo es la trayectoria de un móvil sujeto a la fuerza de gravedad cuando es lanzado con determinada velocidad inicial y cierto ángulo de elevación. Prueba con distintos valores de estos dos parámetros. Si no tienes acceso a internet, intenta lanzar una pelota 10 veces, y observa las distancias que alcanza así como su elevación en cada lanzamiento. Puede variar la altura máxima que logra o el alcance, es decir la distancia a la que cae sobre el piso, desde el punto donde fue lanzado, pero no cambia la forma de la trayectoria. Esta curva siempre es una ______________________.
2. Si mantienes la misma velocidad de salida, por ejemplo 20 m/s y sólo varías el ángulo. ¿Qué ocurre con la altura máxima? ¿Qué ocurre con el alcance?
3. Si mantienes el mismo ángulo de salida, por ejemplo 45° y sólo varías la velocidad de salida. ¿Qué ocurre con la altura máxima? ¿Qué ocurre con el alcance?

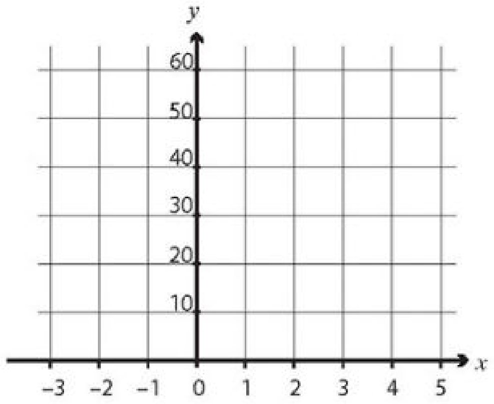
Bloque 3

Anteriormente, aprendiste a resolver ecuaciones cuadráticas de la forma $ax^2 + bx + c = 0$, por distintos métodos, y supiste que este tipo de ecuaciones pueden tener dos soluciones, una o ninguna. Para entender esto, observa cómo la expresión que aparece en el miembro izquierdo de una ecuación toma valores distintos para distintos valores de x, y esto se puede graficar en el plano cartesiano.

Para descubrir qué forma adquieren las gráficas de las ecuaciones cuadráticas, calcula los valores que corresponden a la expresión $2x^2 + x + 1$ y completa la tabla.

x	$y = 2x^2 + x + 1 = 0$	y
-3	$2(9) + (-3) + 1$	16
-1		
0		
2		
5	$2(25) + (5) + 1$	56

Una vez que tengas los valores de y para cada x, grafica los cinco puntos y únelos con una línea suave.



La curva que trazaste es una parábola, su orientación, posición y anchura pueden variar, dependiendo de los coeficientes de la expresión cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$.

a) El coeficiente cuadrático a determina la orientación y la anchura de la curva; el coeficiente lineal b está relacionado con la posición horizontal de la curva en los ejes cartesianos, y el coeficiente independiente c define la posición vertical.

Explora

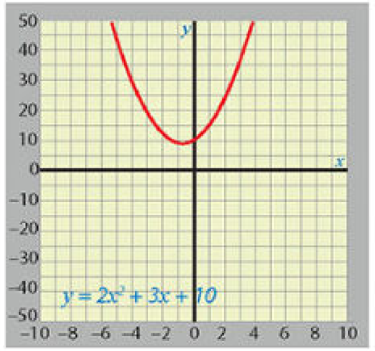
Puedes observar lo que ocurre cuando cambias los valores de estos coeficientes visitando la página de internet: http://www.mathopenref.com/quadraticexplorer.html

(Consulta: 10 de octubre de 2014).

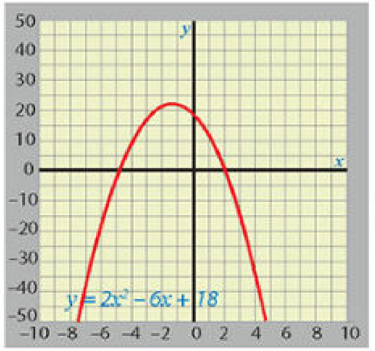
Es interesante conocer la forma de la curva a la que da lugar la expresión cuadrática $y = ax^2 + bx + c$, porque entonces resolver la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ equivale a encontrar aquellos valores de x, para los que y vale 0, es decir, donde la curva cruza al eje x.

Nunca pierdas de vista que más ancha o más angosta, más arriba o más abajo, orientada al derecho o al revés, siempre estarás observando una parábola, excepto cuando $a = 0$. ¿En qué se convierte la parábola cuando $a = 0$?

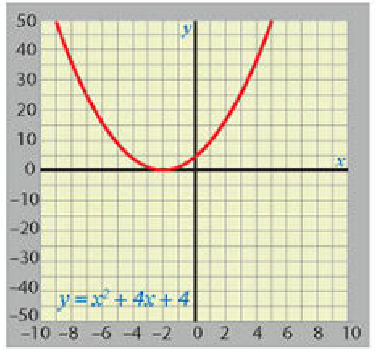
A partir de las siguientes gráficas, identifica cuándo la ecuación correspondiente tiene dos soluciones [2], una solución [1] o ninguna [0]. Calcula el discriminante en cada caso y verifica lo que aprendiste al inicio del bloque.



$a =$ $b =$ $c =$
$b^2 - 4ac =$



$a =$ $b =$ $c =$
$b^2 - 4ac =$



$a =$ $b =$ $c =$
$b^2 - 4ac =$

Discutan en torno a las siguientes preguntas y respóndanlas.

1. ¿Qué significa gráficamente que el coeficiente cuadrático sea negativo?
2. En el caso (a,0), ¿el vértice es un máximo o un mínimo?
3. ¿Qué significa gráficamente que el coeficiente cuadrático sea positivo?
4. En el caso (c,0), ¿el vértice es un máximo o un mínimo?
5. ¿Qué significa gráficamente que el coeficiente independiente sea negativo?
6. ¿Qué significa gráficamente que el coeficiente independiente sea positivo?
7. Cuando (a,0) y (c,0), ¿dónde se encuentra el mínimo de la parábola, en relación con el eje x?
8. Cuando $a < 0$ y $c > 0$, ¿dónde se encuentra el máximo de la parábola, en relación con el eje x?
9. ¿Cuántas veces corta la parábola al eje x cuando a y c tienen signos contrarios?
10. ¿Qué signo adquiere $-4ac$ cuando a y c tienen signos contrarios?
11. ¿Dónde se encuentra el vértice de la parábola cuando $b^2 - 4ac = 0$?
12. ¿Cuántas veces corta la parábola al eje x cuando $b^2 - 4ac < 0$?

Discutan sus respuestas con otras parejas y concluyan completando los siguientes enunciados.

1. Cuando la parábola asociada a una ecuación cuadrática corta al eje x dos veces, el discriminante es __________________________.
2. Cuando la parábola asociada a una ecuación cuadrática toca al eje x una vez, el discriminante es __________________________.
3. Cuando la parábola asociada a una ecuación cuadrática no toca al eje x, el discriminante es __________________________.

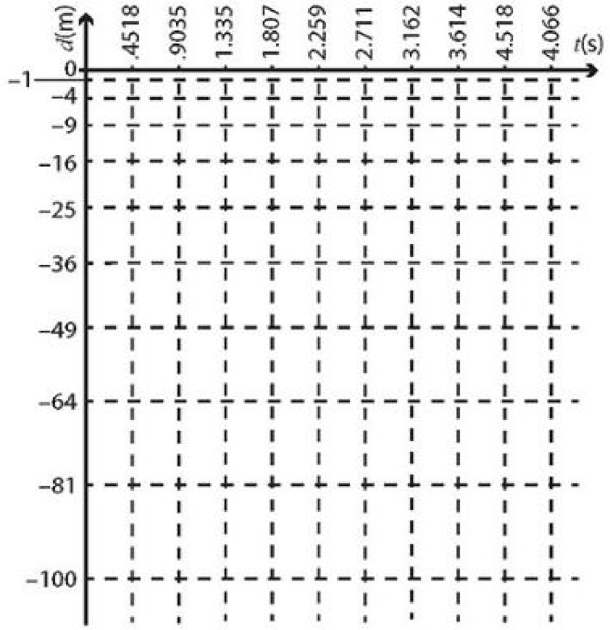
Bloque 3

Analiza la siguiente situación y con base en ella realiza lo que se solicita.

En un experimento se dejó caer libremente una pelota y se tomaron fotografías a intervalos regulares de tiempo, aproximadamente cada 0.4518 segundos, obteniendo un patrón como el que se muestra en la siguiente tabla.

t (s)	0.000	.4518	.9036	1.355	1.807	2.259	2.711	3.162	3.614	4.066	4.518
d (m)											

1. Usa la fórmula $d = -4.9t^2$ para calcular las distancias que corresponden a los tiempos dados y escríbelas en la tabla, redondeando a cuatro cifras (éstas se cuentan a partir de la primera significativa, sin importar la posición del punto decimal).
2. Utiliza el plano cartesiano para graficar cada uno de los puntos que obtuviste. Une los puntos con una línea suave y observa el resultado.



a) ¿Qué tipo de curva obtuviste?

b) Identifica los valores de a, b y c en la expresión que usaste $d = -4.9t^2$.

c) ¿Qué significa gráficamente que $a < 0$?

d) ¿Qué significa gráficamente que $c = 0$?

e) Antes se dijo que b tiene que ver con la posición horizontal, pero hablando con precisión, el valor de b es la pendiente que tiene la recta tangente a la curva, cuando cruza al eje y. ¿Cuál es este valor?

Analicen y resuelvan lo que se solicita.

a) Como resultado de una explosión de prueba, una roca sale disparada y un observador, con ayuda de instrumentos registra las alturas (h) que alcanza la roca en tres momentos distintos (t).

t (s)	1	2	3
h (m)	40.1	70.4	90.9

b) Sabiendo que la altura de la roca se explica con la fórmula $h = at^2 + bt + c$ encuentren los coeficientes a, b y c que corresponden a este movimiento. Observen que cada una de las posiciones de la roca da lugar a una ecuación; por ejemplo, si $t = 1$, $h = 40.1$, da como resultado, por sustitución, la ecuación $40.1 = a + b + c$.

c) Obtengan otras dos ecuaciones y encuentren los coeficientes resolviendo el sistema de tres ecuaciones al que llegaron.

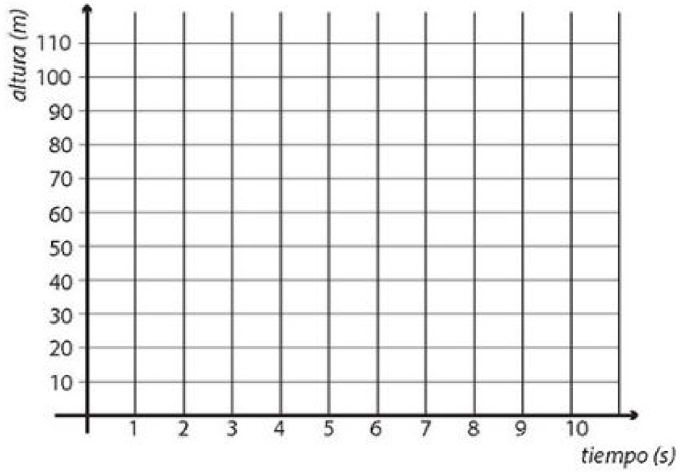
d) Reporten sus resultados:

$a =$ $b =$ $c =$

e) Una vez que tengan los coeficientes, calculen los valores que faltan para completar la tabla.

t (s)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
d (m)	40.1	70.4	90.9							

f) Tracen la gráfica que corresponde, uniendo los puntos con una línea suave.

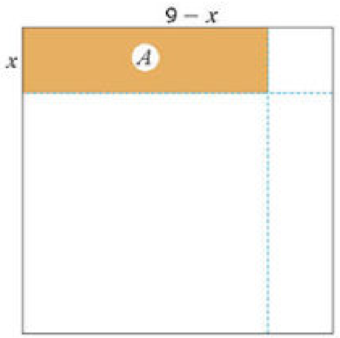


g) Después de unir los puntos, observen la gráfica y respondan las preguntas.

- ¿Cuánto tiempo tarda la roca en alcanzar su altura máxima?
- ¿Qué altura máxima alcanza?
- ¿Cuánto tiempo tarda la roca en regresar al piso?

Bloque 3

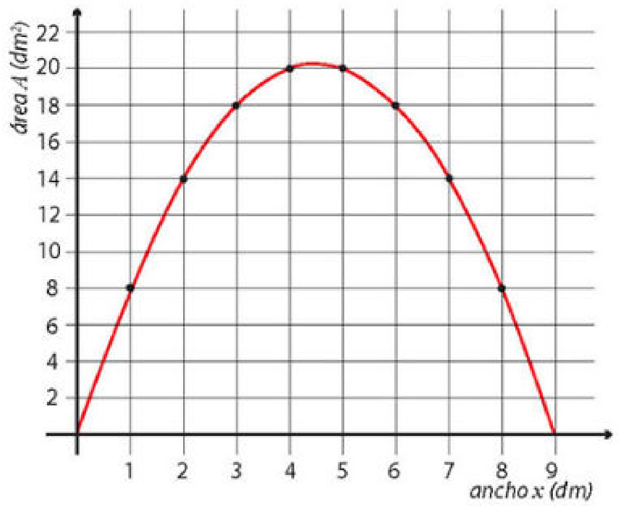
Reunidos en equipos de tres integrantes analicen el siguiente problema y contesten las preguntas.



1. A una cartulina de 9 dm × 9 dm se le cortan, en dos lados adyacentes, dos tiras de ancho x, con lo que se obtiene un rectángulo, como se resalta en la figura. El área del rectángulo que se obtiene, medida en dm^2, está dada por:

$$A = x(9 - x) = -x^2 + 9x$$

a) La siguiente gráfica muestra, en cada uno de sus puntos, el área que corresponde a ese rectángulo, dependiendo del ancho x que se elija.



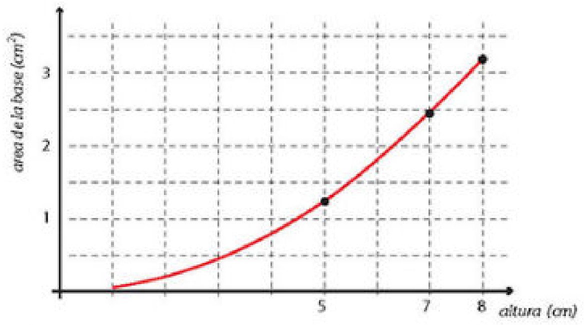
- ¿Qué valores puede tener x, para obtener efectivamente un rectángulo? ¿Qué pasa si $x = 0$? ¿Qué pasa si $x = 9$?
- ¿Para qué valor de x se obtiene el área máxima? ¿Qué tipo de rectángulo se tendría en ese caso?
- ¿Cuál es el área máxima que puede obtenerse?
- ¿Cómo varía el perímetro del rectángulo, dependiendo de x?
- A manera de conclusión, completen el siguiente enunciado: Una familia de rectángulos de perímetro constante tiene área máxima cuando el rectángulo toma la forma de ____________.

2. Dentro de un terreno de cultivo, desea cercarse una hortaliza rectangular con una malla de 60 m de largo. ¿Qué forma debe darse a la hortaliza para tener el área máxima posible? ¿Cuál es esa área?

3. Un cono circular puede cortarse a distintas alturas, el área de la base del cono recortado depende cuadráticamente de su altura. La siguiente tabla muestra algunos valores de las áreas para diferentes alturas:

Altura h (cm)	5	7	8
Área de base b (cm^2)	1.25	2.45	3.2

Así, la gráfica completa es la siguiente.



Usando sólo la gráfica, estimen el área que tendría la base de un cono recortado a 6 cm de altura.

a) ¿Qué altura debería darse a un cono para que su base tuviera un área de 2 cm^2?

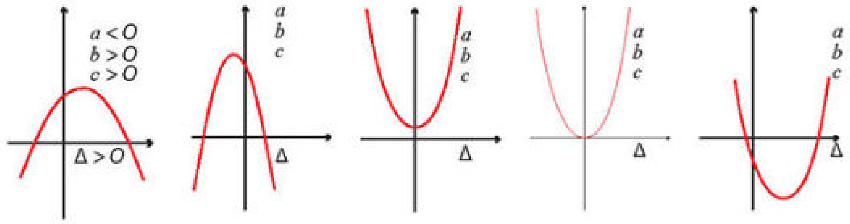
b) Usando los datos de la tabla, encuentren la expresión algebraica que permita calcular el área de la base a partir de la altura.

c) Usen la expresión algebraica para verificar las respuestas que estimaron observando la gráfica.

d) ¿Qué área tendrá la base de un cono de 3.5 cm de altura?

Para cerrar este tema, escribe en tu cuaderno un resumen en donde se explique qué forma tiene la gráfica de la expresión $y = ax^2 + bx + c$.

a) Incluye en tu resumen las siguientes gráficas:



b) Señala en cada gráfica los signos que tienen estos coeficientes, y el signo que tiene el discriminante Δ (delta) de la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$, como en el ejemplo.

c) Menciona cuántos puntos necesitas conocer para encontrar una expresión cuadrática, mediante un sistema de ecuaciones.

Bloque 3

Lectura y construcción de gráficas formadas por secciones rectas y curvas que modelan situaciones de movimiento, llenado de recipientes, etcétera

Reactivando el saber

Para observar algunos datos resulta más práctico observar una gráfica y visualizar tendencias; sin que por ello dejen de ser importantes las tablas, pues de algún modo, no sería posible construir gráficas sin ellas, ni conocer los valores precisos de las variables.

En algunas situaciones las variables se comportan de una manera no uniforme y en esos casos, la información gráfica se vuelve una herramienta todavía más útil para visualizar el comportamiento y la relación entre las variables.

La población en México

En su edición del 2008, las Estadísticas del Agua en México, dadas por la Conagua, presentan, entre otras, la siguiente tabla:

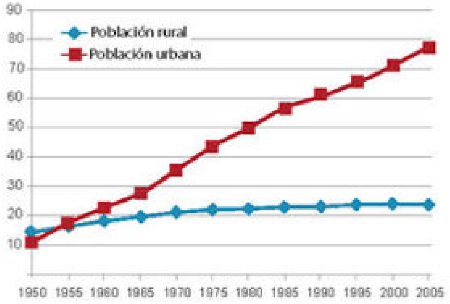
Evolución de la población de México, de 1950 a 2005
(millones de habitantes)

Año	1950	1955	1960	1965	1970	1975	1980	1985	1990	1995	2000	2005
Rural	14.80	17.23	18.58	19.93	21.24	22.55	22.93	23.30	23.73	24.16	24.71	24.28
Urbana	11.02	17.76	23.10	28.43	36.45	44.47	51.34	58.21	62.73	67.25	72.98	79.20
Total	25.82	34.99	41.68	48.36	57.69	67.02	74.27	81.51	86.46	91.41	97.69	103.48

Se considera que la población rural es aquella que integra localidades con menos de 2 500 habitantes, en tanto que la urbana se refiere a poblaciones con 2 500 habitantes o más.
Fuente: Conagua. Subdirección General de Programación. Elaborado a partir de datos de Inegi. Censos Generales y Conteos.

La misma información, en una gráfica, se observa tal como se muestra a continuación.

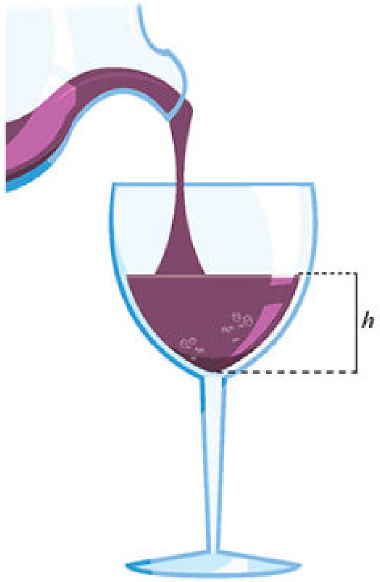
Desarrolla la siguiente actividad.

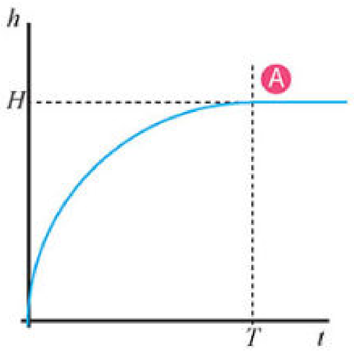


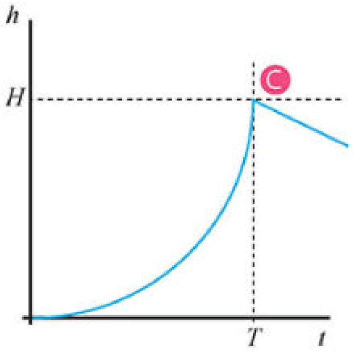
1. Observa la gráfica de los datos que se presentan en la tabla y contesta las siguientes preguntas.
   a) ¿Qué ha sucedido con la población rural de México, entre 1950 y 2005?
   b) ¿Qué ha sucedido con la población urbana de México, entre estos mismos años?
   c) ¿En qué años, la población urbana creció más rápido?
   d) ¿Alguna de las dos poblaciones, tiende a estabilizarse? Justifica tu respuesta.
   e) ¿En qué momento la población urbana rebasó a la población rural?
   f) ¿Según los datos, se prevé que las poblaciones urbana y rural, vuelvan a ser del mismo tamaño?, ¿por qué?
2. ¿Qué te resultó más útil para responder las preguntas, la tabla o la gráfica?, ¿por qué?

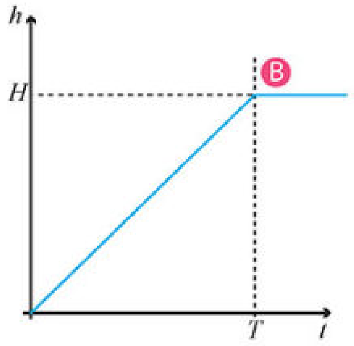
Analicen el siguiente experimento y respondan lo que se solicita.

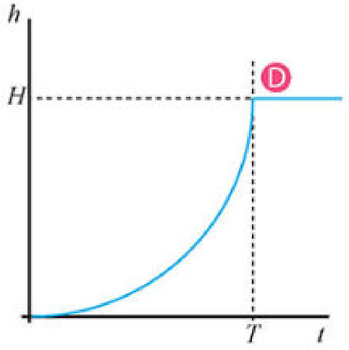
Una copa se llena con un caudal constante durante un tiempo indefinido. La altura del agua h en la copa va en aumento hasta que empieza a derramarse sin que se detenga el caudal. Una de las siguientes gráficas describe la altura del agua dentro de la copa en función del tiempo.











a) ¿Cuál de las gráficas describe el llenado de la copa?
b) ¿Cuál es la profundidad que tiene la copa, desde su borde hasta el fondo?
c) ¿Cuánto tiempo tardó en llenarse la copa hasta que empezó a derramarse?
d) ¿Qué forma debería tener el vaso de la copa para que la gráfica correspondiente fuera la B?

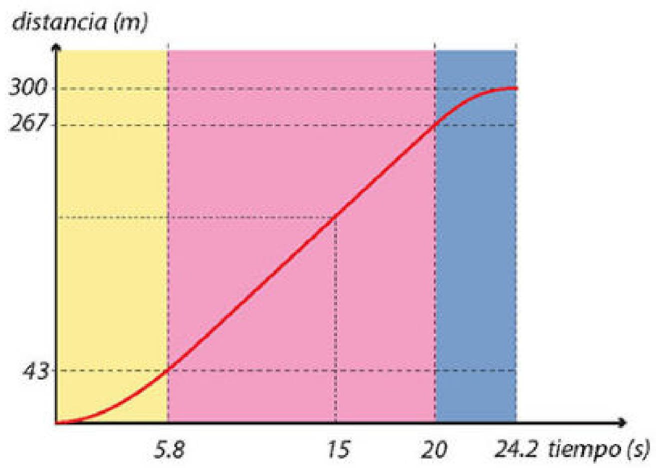
En el caso de una función lineal, recuerda que la tendencia al crecimiento o decrecimiento está dada por la pendiente. En el siguiente problema, este concepto debe ser tomado en cuenta para responder algunas de las preguntas.

Bloque 3

Una función definida por tramos

Analicen los problemas y realicen lo que se indica.

1. Un auto empieza su movimiento acelerando de manera constante hasta que alcanza una velocidad máxima que mantiene durante cierto tiempo. Al llegar a un semáforo en rojo, el auto disminuye suavemente su velocidad hasta detenerse. La siguiente gráfica muestra las distancias recorridas por el auto en función del tiempo. En ella, las pendientes en cada punto representan las velocidades.

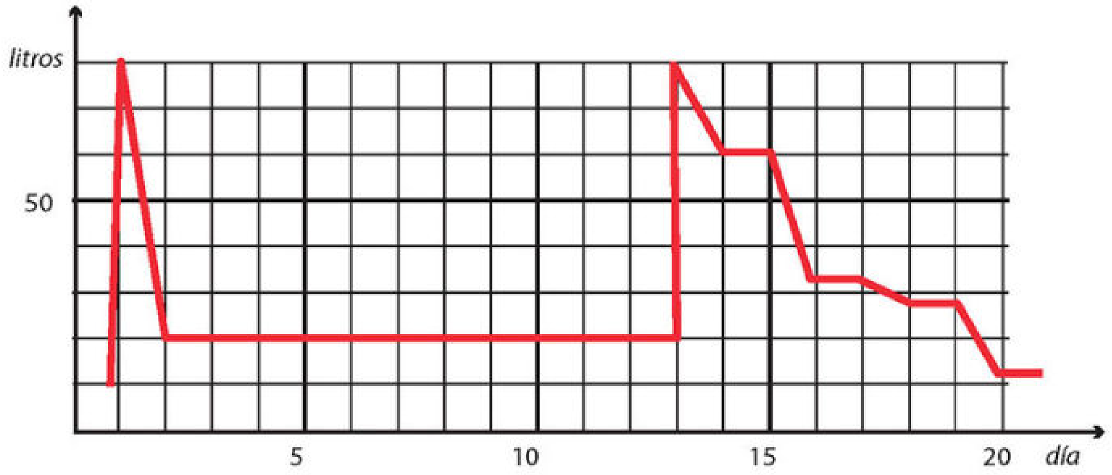


   a) A partir de la información que muestra la gráfica, discutan y respondan las preguntas.
      - ¿Con qué color se identifica en la gráfica el lapso de frenado?, ¿el de arranque?, ¿el de tránsito a velocidad constante?
      - ¿Cuánto tiempo duró el recorrido total del auto?
      - ¿Qué distancia tuvo que recorrer para alcanzar su velocidad máxima?
      - ¿Qué distancia recorrió durante su frenado?
      - ¿Cuánto tiempo tardó en frenar?
      - ¿Cuál fue la velocidad máxima que alcanzó
      - ¿Cuál fue su velocidad promedio?
      - ¿Qué distancia había recorrido a los 15 segundos?

   b) Comparen sus respuestas con las de los demás equipos.

2. Con respecto a la última pregunta, escriban en su cuaderno los métodos que usaron distintos equipos para responderla, y contesten lo siguiente.
   a) ¿Cómo se explican las diferencias entre las respuestas?
   b) Con la información de la gráfica, ¿es posible obtener el valor exacto de lo que se pide?, ¿cómo?
   c) Intenten responder a esta última pregunta como se indica a continuación.
      - Midiendo sobre la gráfica.
      - Aplicando una regla de tres convenientemente o semejanza de triángulos.
      - Hallando la expresión algebraica que corresponde al segundo tramo de la gráfica y sustituyendo en ella $t = 15$.

3. La siguiente gráfica muestra el volumen de gasolina contenido en el tanque de un vehículo durante varios días.



En la noche del primer día, el tanque se llenó en la gasolinera. Adicionalmente, se sabe que el vehículo hizo un viaje por carretera y transitó algunos días en la ciudad; también se conoce que el tanque fue vuelto a llenar y que el vehículo se quedó estacionado después de 20 días.

4. Respondan las preguntas.
   a) ¿Qué días circuló el vehículo en la ciudad?
   b) ¿Qué días viajó en carretera?
   c) ¿Qué días estuvo estacionado?
   d) De los días que circuló en la ciudad, ¿en cuál tuvo mayor actividad? ¿Qué día tuvo menor actividad?
   e) ¿Cuántos litros de gasolina le caben al tanque?
   f) ¿Cuántos litros llenaron el tanque la primera vez? ¿Cuántos la segunda?
   g) ¿Cuántos litros quedaron en el tanque después del día 20?
   h) Si el vehículo tiene en carretera un rendimiento de 10 km/l, ¿cuántos kilómetros recorrió en carretera?
   i) Si en la ciudad tiene un rendimiento de 7 km/l, ¿cuántos kilómetros recorrió en la ciudad?
   j) ¿Cuántos y en qué días hubo exactamente 40 l en el tanque?

Bloque 3

Analicen la información y realicen lo que se solicita.

1. En México, las tasas de crecimiento poblacional anual han variado significativamente. En 1895 era de 1.5%, pero decayó progresivamente hasta alcanzar una tasa negativa de −0.5%, debido a la mortandad producida por la Revolución Mexicana. Posteriormente, hubo una recuperación gradual hasta alcanzar 1.7% en 1921, tasa que se mantuvo constante durante 10 años. A partir de entonces se registró un crecimiento continuo de la tasa que alcanzó un nivel máximo de 3.4% en 1960. Desde entonces, la tasa de crecimiento anual volvió a decaer paulatinamente hasta llegar a 1% en el año 2000 y terminar con un registro de 1.8% en 2005.

Construyan una gráfica para que ilustren la información anterior, y úsenla para responder en forma aproximada las siguientes preguntas.

a) ¿En qué periodo la recuperación de la tasa de crecimiento ha resultado más relevante?

b) ¿Entre qué años ha sido más drástica la caída de la tasa anual de crecimiento?

c) ¿En qué lapso estuvo por debajo de 1%?, ¿en qué años se ubicó por encima de 2%?

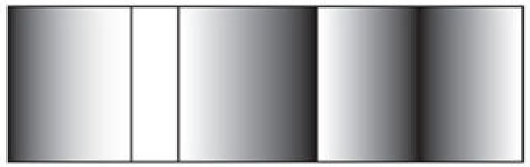
d) Durante todo el periodo considerado, ¿la tendencia global ha sido a la alza o a la baja?

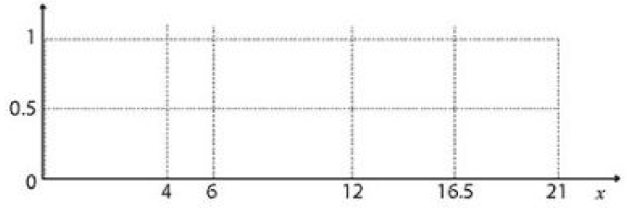
e) ¿Qué tendencia se presentó antes de 1960?, ¿qué tendencia se ha observado desde 1960?

Desarrollen la siguiente actividad.

La banda sombreada que se muestra en la siguiente figura incluye tonos que van desde la luminosidad total (blanco), hasta la oscuridad total (negro), pasando ocasionalmente por medios tonos (grises). Si le asignan a la luminosidad total el valor 1 y a la oscuridad total el valor 0, la intensidad en cada punto a lo largo de la banda dependerá de x, la posición horizontal dentro de la misma.

a) De manera apreciativa tracen la gráfica que corresponde a este patrón y comparen su gráfica con las de sus compañeros.





b) Respondan las siguientes preguntas.

- ¿En qué puntos la gráfica sufrió un cambio abrupto?
- ¿En qué puntos alcanza su valor máximo la luminosidad?
- ¿En qué puntos obtiene su valor mínimo?

Discutan los resultados de la actividad anterior y respondan lo que se solicita.

Quizá algunos compañeros trazaron la gráfica utilizando sólo rectas, mientras que otros tal vez usaron parábolas y rectas. Observen los resultados y discutan en torno a las siguientes preguntas:

a) ¿A qué tramo de la gráfica corresponde indiscutiblemente una recta?

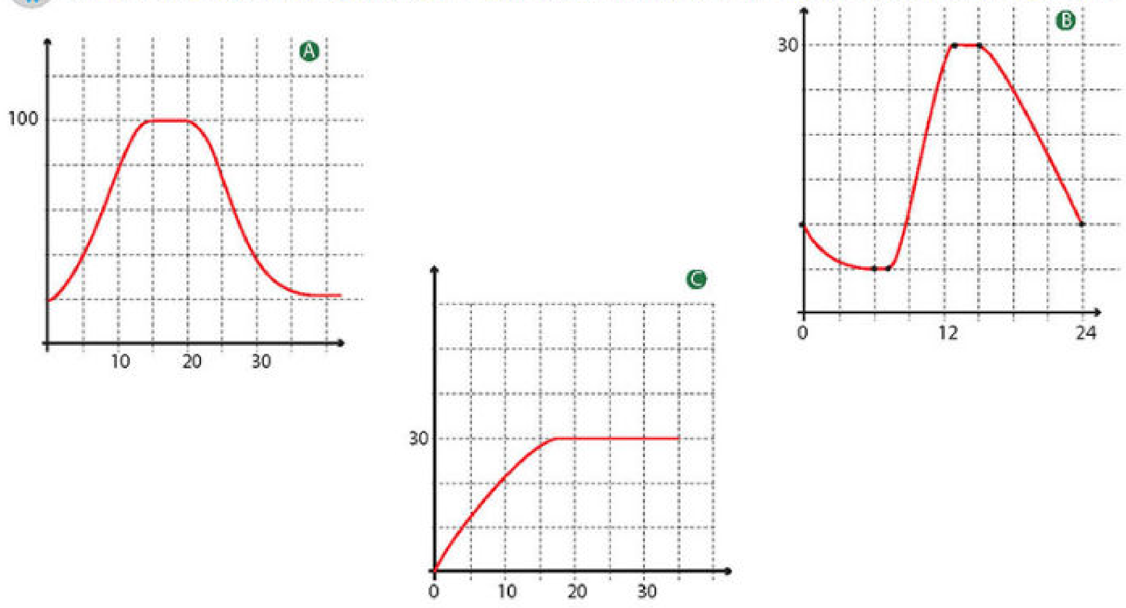
b) Si alguno de sus compañeros trazó únicamente rectas

- ¿En qué puntos de la gráfica hay picos?
- ¿En qué puntos se encontró una luminosidad de 0.5?

c) Si alguno de sus compañeros trazó parábolas y rectas

- ¿En qué puntos de la gráfica están los vértices de las parábolas?
- ¿En qué puntos se encontró una luminosidad de 0.5, aproximadamente?

Observa las siguientes gráficas y relaciona cada una con la situación que le corresponda.



a) La temperatura ambiental a lo largo del día. [ ]

b) La temperatura en grados centígrados del agua hasta que hierve durante unos minutos y luego se enfría paulatinamente. [ ]

c) La temperatura de un bloque de hielo que se funde hasta alcanzar la temperatura ambiente y permanece en ese estado por tiempo indefinido. [ ]

Realiza lo que se indica a continuación para que llegues a una conclusión sobre lo revisado hasta ahora.

Escribe en tu cuaderno un resumen de esta secuencia de estudio, en él debes mencionar la ventaja que tiene representar datos numéricos en forma gráfica. Señala por qué se considera que la gráfica es una herramienta que permite apreciar de manera cualitativa algunas características relevantes de una situación determinada. Ilustra tu resumen con algunos ejemplos inventados por ti.

Nociones de probabilidad

Cálculo de la probabilidad de ocurrencia de dos eventos independientes (regla del producto)

Reactivando el saber

El concurso

Analiza la siguiente situación y responde lo que se solicita.

Un concursante finalista tiene tres puertas donde encontrará su premio a elegir. En dos de ellas los premios tienen un valor mínimo y en la otra está el premio importante.

Después de haber seleccionado su puerta, el conductor del concurso le muestra una de las puertas no elegidas, con uno de los premios de poco valor, para ofrecerle la posibilidad de cambiar su puerta por la otra.

Si lo hace, ¿mejoran sus posibilidades de ganar? ¿Consideras que se afecta la probabilidad de ganar al intercambiar su primera puerta por la nueva posibilidad?, ¿por qué?

La historia de las dos piedras

Cuenta una leyenda que un comerciante había hecho un mal negocio y pidió dinero a un prestamista para recuperar sus mercancías. Cumplido el plazo acordado para pagar, el comerciante se encontraba sin dinero. Tenía una hermosa hija con quien el prestamista deseaba casarse a toda costa y, viendo la oportunidad perfecta, éste le propuso al comerciante un trato: "Meteré una piedra negra y una piedra blanca en esta bolsa vacía cuyo contenido no puede verse. Tu hija meterá la mano y si saca la piedra blanca perdonaré la deuda y ambos regresarán a casa; si por el contrario saca la piedra negra deberá casarse conmigo y tu deuda quedará pagada; pero si ella saca la piedra negra y se niega a realizar la boda, ambos morirán".

Aunque la hija del comerciante no deseaba casarse convenció a su padre de aceptar el trato y, estando en un camino lleno de piedras, el prestamista levantó del suelo una piedra blanca y una negra; las mostró al público presente y enseguida metió la mano a la bolsa conservando en su mano la piedra blanca, dejando dentro sólo la piedra negra. ¿Podría la hija del comerciante salvarse de realizar la boda o negarse y morir?

Responde las siguientes preguntas y analiza los ejemplos que se presentan a continuación.

1. ¿El resultado de un experimento aleatorio depende del resultado de un evento anterior? Justifica tu respuesta.
2. ¿Qué es necesario averiguar para saber cómo afecta la probabilidad de un evento A a un evento B?

3. Analicemos un ejemplo.

a) En una bolsa hay seis caramelos de diferentes sabores (fresa, naranja, piña, limón, uva y cereza). Completa la tabla con las condiciones para el experimento.

Total de caramelos que hay en la bolsa: 6		
Sabor	**Cantidad**	**Probabilidad**
Fresa	1	$\frac{1}{6}$
Naranja		
Piña		
Limón		
Uva		
Cereza		

Lo primero que debes conocer es el conjunto de posibles resultados, esta información aparece en la tabla bajo la etiqueta "Sabor". Con el total de caramelos que hay en la bolsa y la cantidad de caramelos de cada sabor puedes asignar a cada posible resultado una probabilidad.

- ¿Cuál es la probabilidad de que obtengas el caramelo de uva?
- ¿Cuánto da la suma de las probabilidades de todos los posibles resultados?

b) Supón que alguien mete la mano y sin mirar toma el caramelo de limón. Después de esto viene tu turno. Completa la tabla con las condiciones para tus probabilidades.

Total de caramelos que hay en la bolsa: ____		
Sabor	**Cantidad**	**Probabilidad**
Fresa		
Naranja		
Piña		
Limón		
Uva		
Cereza		

- ¿Qué ha ocurrido con las condiciones del experimento?
- ¿Cuál es la probabilidad de obtener un caramelo de limón y por qué?
- ¿Cuál es ahora la probabilidad de que obtengas el caramelo de uva?
- ¿Cuánto da ahora la suma de las probabilidades de todos los posibles resultados?
- ¿Dirías que el resultado de este experimento depende del resultado del evento anterior?, ¿por qué?

Bloque 3

4. Analicemos un ejemplo más.

En un juego de feria le dan un premio a todo aquel que obtenga 5 en el tiro de un dado.

a) Completa la tabla con las condiciones de este experimento.

Total de caras del dado : 6	
Cantidad	**Probabilidad**
1	
2	
3	
4	
5	
6	

- ¿Cuál es la probabilidad de que obtengas un 5?
- ¿Cuánto da la suma de las probabilidades de todos los posibles resultados?

b) Supón que alguien pasa antes que tú y obtiene como resultado un 3. Completa la tabla con las condiciones para tus probabilidades.

Total de caras del dado : ____	
Cantidad	**Probabilidad**
1	
2	
3	
4	
5	
6	

- ¿Qué ha ocurrido con las condiciones del experimento?
- ¿Cuál es ahora la probabilidad de que obtengas un 5?
- ¿Cuánto da ahora la suma de las probabilidades de todos los posibles resultados?
- ¿Dirías que el resultado de este experimento depende del evento anterior?, ¿por qué?

Eventos dependientes e independientes

Cuando en un experimento aleatorio, un evento A no modifica la probabilidad de que ocurra un evento B, decimos que A y B son eventos independientes.

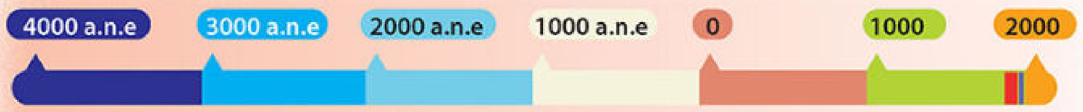
Cuando en un experimento aleatorio un evento A modifica la probabilidad de que ocurra un evento B, decimos que A y B son eventos dependientes.

5. Responde las preguntas.

a) ¿Cuál es el espacio muestral del experimento de los caramelos que viste anteriormente?

b) ¿Cuál es el espacio muestral del experimento de tirar un dado?

Matemáticas en el pasado



Johann Gregor Mendel (1822-1884) fue un fraile agustino estudioso de la naturaleza. Actualmente es conocido como el padre de la genética debido a sus trabajos sobre la transmisión de las características de las plantas a sus descendientes. Mendel realizó sus primeros experimentos con flores de la misma especie que presentaban colores distintos, algunas eran púrpura y otras eran blancas.

Mendel encontró que hay un proceso aleatorio en la transmisión de las características genéticas y, por lo tanto, las leyes de transmisión de esta información dependen de la probabilidad.

Las leyes de Mendel son un ejemplo de la utilidad de las matemáticas en el estudio de las ciencias naturales, no sólo en física, sino también en biología y química.

Fuente: Salamanca, Fabio, 2003.

Para conocer más sobre Mendel, te recomendamos consultar en tu Biblioteca de Aula o Escolar la siguiente lectura: *El olvidado monje del huerto: Gregor Johann Mendel* de Fabio Salamanca, 2003.

Analiza y resuelve los siguientes problemas.

1. En condiciones normales, la probabilidad de que una pareja tenga un hijo varón es de $\frac{1}{2}$ y la probabilidad de que tengan una niña es de $\frac{1}{2}$. Suponiendo que una familia tiene 2 hijos varones. ¿Cuál es la probabilidad de que en la siguiente ocasión tengan una niña? ¿El sexo del siguiente hijo (o hija) depende del sexo de los que ya han nacido? Justifica tu respuesta.

2. Una empresa da crédito a sus clientes para comprar automóviles. Para entregar los vehículos, cada mes se hace un sorteo en el que a cada cliente se le asigna un número de puntos que corresponde a los meses que ha esperado por el coche. La probabilidad para cada cliente se calcula con la expresión:

$$P = \frac{\text{(puntos del cliente)}}{\text{(puntos de todos los clientes)}}$$

a) La probabilidad de que determinado cliente obtenga el automóvil en cada sorteo ¿es un evento dependiente o independiente de los eventos anteriores?

Bloque 3

b) Supón que habiendo 20 clientes, el total de puntos de todos es 240. Antonia tiene 4 puntos. ¿Cuál es su probabilidad de obtener el automóvil?

c) Ahora piensa que ese mes, el auto lo obtuvo un cliente con 39 puntos. ¿Cuál es la probabilidad de que Antonia obtenga el auto al mes siguiente? Recuerda que tanto Antonia como los otros 18 clientes que no salieron sorteados aumentan sus puntos por haber esperado un mes más.

- ¿Crees que conforme aumenta el tiempo de espera aumenta la probabilidad de que Antonia obtenga el automóvil? Justifica tu respuesta.

Resuelve lo que se solicita.

1. La siguiente tabla muestra todos los posibles resultados de lanzar dos dados, complétala y elabora un diagrama de árbol que contenga la misma información.

Primer dado \ Segundo dado	1	2	3	4	5	6
1	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
2	(2,1)					
3	(3,1)					
4	(4,1)					
5	(5,1)					
6	(6,1)					

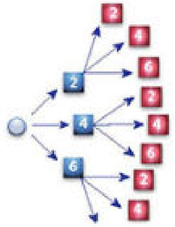
2. Identifica si los eventos A y B que se proponen en cada experimento aleatorio son dependientes o independientes a partir de sus espacios muestrales, toma en cuenta que el evento A ocurre siempre antes del B.

Experimento	Espacio muestral	Evento A	Evento B	Eventos dependientes o independientes
Lanzar una moneda		Obtener “sol”	Obtener “águila”	
Sacar una piedra de una bolsa en la que hay una piedra blanca y una negra, sin regresar la piedra		Obtener la piedra blanca	Obtener la piedra negra	
Extraer una canica de una bolsa en la que hay una canica roja y una negra, regresando la canica		Obtener la canica roja	Obtener la canica negra	
Arrojar un dado		Obtener un 4	Obtener un 3	
Tirar dos dados		Obtener un número mayor que 3 en el primer dado	Que la suma de los dos dados sea mayor que 9	

3. Analiza el siguiente experimento y completa la tabla con las probabilidades que se piden.

Experimento: Sumar el resultado de tirar dos dados seguidos					
Evento A	**Probabilidad**	**Evento B**	**Probabilidad**	**Evento compuesto**	**Probabilidad**
Obtener 1 en el primer tiro		Obtener 1 en el segundo tiro		Obtener (1, 1), es decir, 1 en el primer dado y 1 en el segundo	
Obtener un número par en el primer tiro	$\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$	Obtener un número par en el segundo tiro	$\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$	Que ambos dados sean pares	$\frac{9}{36}=\frac{1}{4}$
Obtener 1 o 3		Obtener 4, 5 o 6		Obtener (1, 4), (1, 5), (1, 6), (3, 4), (3, 5) o (3, 6)	

a) Observa el diagrama de árbol del evento compuesto *Que ambos dados sean pares*. Para cada evento compuesto elabora un diagrama de árbol en el que sólo traces casos favorables al evento compuesto.



- ¿Cómo puede conseguirse la probabilidad del evento compuesto a partir de las probabilidades de los eventos A y B?

4. Completa la nueva tabla con las probabilidades que se piden.

Experimento: Sumar el resultado de tirar dos dados seguidos					
Evento A	**Probabilidad**	**Evento B**	**Probabilidad**	**Evento compuesto**	**Probabilidad**
Obtener un número par en el primer tiro		Que la suma de ambos números sea 10		Obtener (4, 6), (6, 4)	
Obtener un número par en el primer tiro		Que el segundo tiro sea el primer tiro más uno		Obtener (2, 3), (4, 5)	
Obtener un número par en el primer tiro		Que el segundo tiro sea el doble del primero		Obtener (2, 4)	

a) Elabora los diagramas de árbol correspondientes.

- ¿Cómo puede obtenerse la probabilidad del evento compuesto a partir de las probabilidades de los eventos A y B?
- ¿Cuál es la diferencia entre los eventos de esta tabla y los de la anterior?

Probabilidad de eventos independientes

La probabilidad del evento compuesto que se obtiene al combinar dos eventos independientes es $P = P_1 \cdot P_2$. Esta fórmula siempre es útil cuando se trata de eventos independientes. La regla $P = P_1 \cdot P_2$ se puede generalizar para calcular la probabilidad de un evento compuesto por n eventos independientes de la siguiente manera: $P = P_1 \cdot P_2 \cdot \cdots \cdot P = P_1 \cdot P_2 \cdot \cdots \cdot P_n$.

Resuelve los siguientes problemas.

1. El departamento de control de calidad de una fábrica de electrodomésticos sabe que de una muestra de 12 artículos, 2 están defectuosos.
   a) Calcula la probabilidad de que el primero en salir no sea defectuoso.
   b) Suponiendo que el primero salió defectuoso, calcula la probabilidad de que el segundo salga igual.
   c) Si el segundo no fuera defectuoso, calcula la probabilidad de que el tercero sí lo sea.
   d) ¿Estos eventos son independientes?, ¿por qué?
2. En una aduana, la probabilidad de que el semáforo marque "verde" es de $\frac{3}{4}$.
   a) Calcula la probabilidad de que a dos personas seguidas les toque verde.
   b) Calcula la probabilidad de que a tres personas seguidas les toque verde.
   c) ¿Qué es más probable, ganar un volado o que a tres personas seguidas les toque "verde" en la aduana?, ¿por qué?

Conclusión de la historia de las dos piedras

Al meter la mano en la bolsa y encontrar una sola piedra, la hija del comerciante comprendió que el prestamista había escondido en su mano la piedra blanca para que ella obtuviera la piedra negra y lo confirmó al ver su puño cerrado. Sacó entonces el puño cerrado, dejando la piedra en la bolsa, fingió tropezar y tirar la piedra al suelo. Entonces se disculpó con el público diciendo: "he tropezado y he tirado al suelo la piedra, de manera que no sé qué color obtuve", pidió entonces a uno de los presentes revisar qué piedra había quedado al interior de la bolsa, una niña metió la mano, encontrando la piedra negra. La hija del comerciante dijo entonces: "como la piedra negra ha quedado dentro de la bolsa, la que yo he sacado era la piedra blanca, de esta manera, como todos pueden ver, la deuda de mi padre queda saldada y tanto él como yo podemos volver a casa en paz".

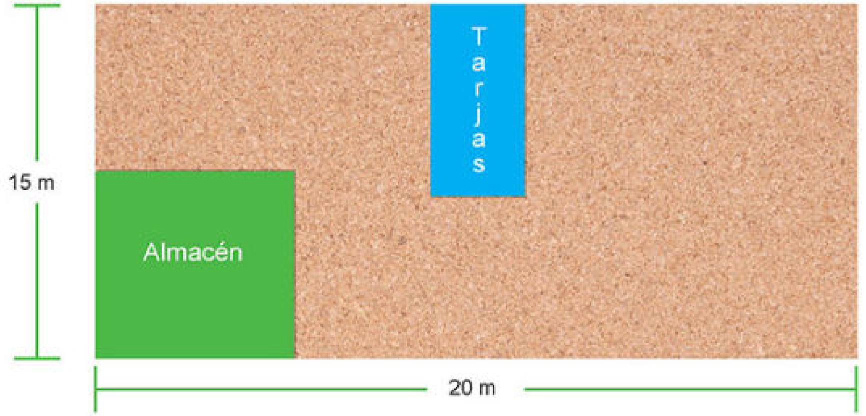
Para concluir este bloque realiza en tu cuaderno lo que se indica a continuación.

1. Explica qué es el espacio muestral de un experimento aleatorio. Ilustra tu explicación con un ejemplo en el que explicites todos los elementos del espacio muestral.
2. Construye un esquema para describir qué son los eventos dependientes y los independientes de un experimento aleatorio. Ilústralo con un ejemplo de cada uno.
3. Justifica por qué en un evento compuesto por eventos simples es posible formular una regla que te permite calcular su probabilidad a partir de las probabilidades de los eventos simples que lo conforman. Ilustra con un ejemplo de cada uno. Explica en qué condiciones es válido aplicarla.

Evaluación tipo PISA

Lee, analiza la información presentada y resuelve las siguientes situaciones problemáticas.

A una escuela secundaria se le otorgó un terreno anexo para construir un laboratorio de química en el que los alumnos puedan realizar sus experimentos. El terreno mide 20 m de largo y 15 m de ancho. Para la construcción del laboratorio es necesario considerar dejar $\frac{1}{6}$ para almacén del material y $\frac{1}{16}$ para las tarjas, además de espacios entre las mesas de trabajo para caminar libremente sin interrumpir los experimentos.



1. ¿Qué medidas debe tener el terreno del almacén si se ha decidido que sea un cubo?
a) l = 6.16 m
b) l = 5.66 m
c) l = 7.07 m
d) l = 1.17 m

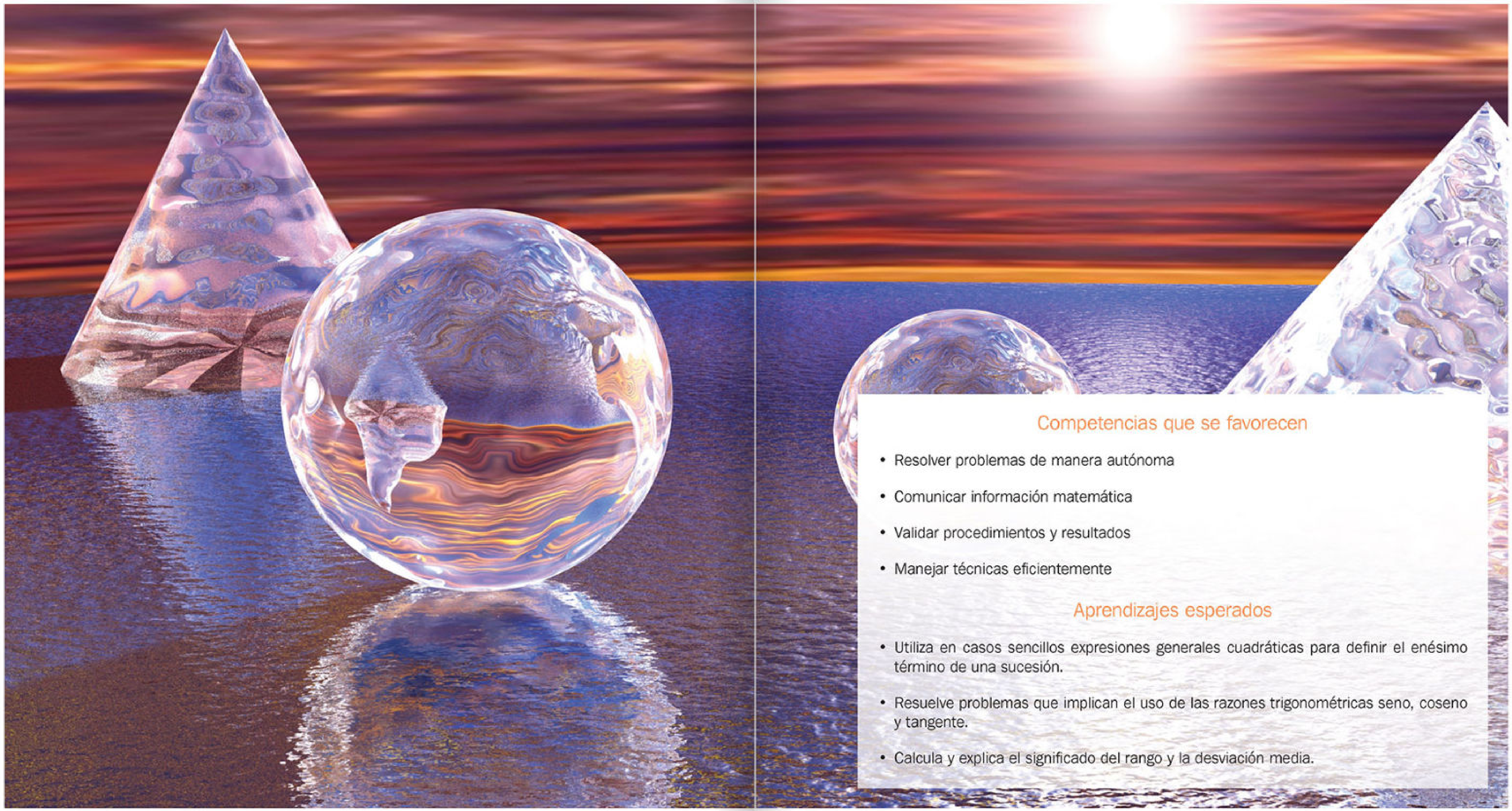
2. ¿Cuál debe ser el ancho de las tarjas si su largo necesita ser de 7.5 m?
a) 1.5 m
b) 2.5 m
c) 4.5 m
d) 7.5 m

3. ¿Qué cantidad de terreno será el destinado para el resto del laboratorio?
a) 68.75 m²
b) 75.68 m²
c) 231.25 m²
d) 321.25 m²

4. ¿Qué cantidad de terreno usarán el almacén y las tarjas?
a) 68.75 m²
b) 75.68 m²
c) 231.25 m²
d) 321.25 m²

Utiliza este código para evaluar la habilidad que tienes al calcular la probabilidad de ocurrencia en eventos independientes.

Bloque 4



Competencias que se favorecen

- Resolver problemas de manera autónoma
- Comunicar información matemática
- Validar procedimientos y resultados
- Manejar técnicas eficientemente

Aprendizajes esperados

- Utiliza en casos sencillos expresiones generales cuadráticas para definir el enésimo término de una sucesión.
- Resuelve problemas que implican el uso de las razones trigonométricas seno, coseno y tangente.
- Calcula y explica el significado del rango y la desviación media.

Sentido numérico y pensamiento algebraico

Patrones y ecuaciones

Obtención de una expresión general cuadrática para definir el enésimo término de una sucesión

Reactivando el saber

Analiza y responde lo que se solicita.

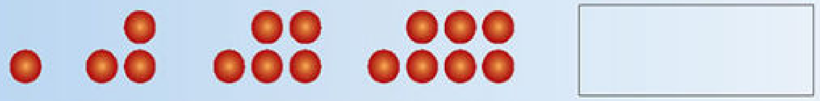
Una forma en la que el cerebro humano recrea su capacidad de raciocinio es reconociendo patrones. Aunque esto se da de manera natural, es necesario desarrollar algunas habilidades para facilitar e incrementar dicha capacidad.

Algunos patrones son muy fáciles de reconocer y pueden ser numéricos, como los siguientes, en los que se pide escribir los elementos faltantes:

a) 1, 2, 3, 4, ____, ____, ...

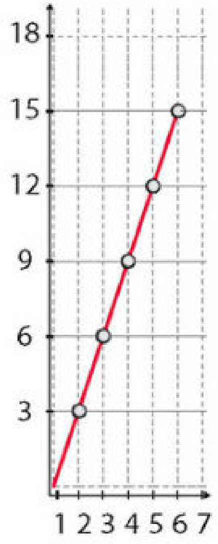
b) 2, 4, ____, 8, 10, ____, ...

O pueden ser figurativos. Como cuando se solicita dibujar la imagen que completa el patrón.



Reúnanse con un compañero y desarrollen la siguiente actividad.

Construyan tres gráficas de tipo xy, una para cada una de las sucesiones que se proporcionaron a manera de ejemplo; para ello, coloquen en el eje x la secuencia natural 1, 2, 3, 4, ... para representar la posición que ocupa cada término de la sucesión; y en el eje y marquen su valor numérico equivalente. Por ejemplo, la **sucesión lineal** 3, 6, 9, 12, 15,... quedaría representada por la siguiente gráfica.



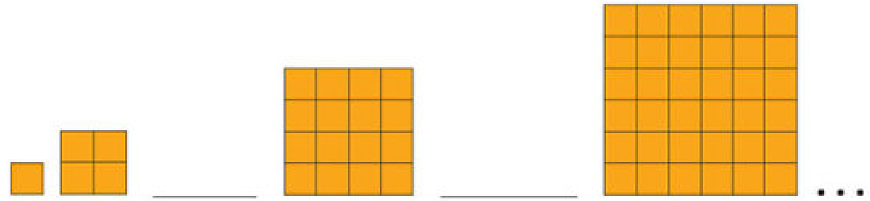
Palabra Mu

sucesión lineal. Es aquella que puede representarse de manera gráfica mediante una recta.

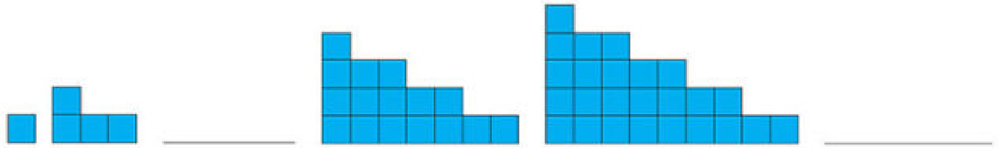
El objetivo de esta lección es que aprendan a reconocer otra clase de patrones, en los que intervienen expresiones cuadráticas.

Realicen lo que se solicita a continuación.

1. Analicen la sucesión de figuras.



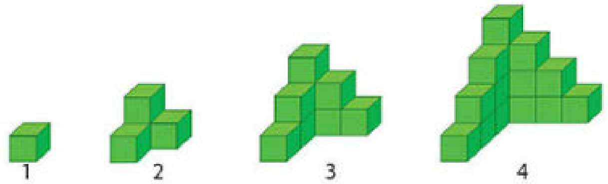
   a) Dibujen los términos faltantes.
   b) Escriban el número que cada figura está representando.
   c) Formulen una expresión algebraica en la que se represente al enésimo término (el que ocupa la posición n) de la sucesión.
   d) Realicen una gráfica que represente a la sucesión.
2. ¿Qué valor numérico le corresponde al octavo término?
3. Analicen la siguiente sucesión figurativa y realicen lo que se solicita.



   a) Dibujen las figuras que faltan.
   b) Escriban el número que cada figura está representando.
   c) Determinen una expresión algebraica para conocer el número que le corresponde al enésimo término de la sucesión.
   d) Representen la sucesión en una gráfica.
   e) ¿Esta sucesión incluirá el término 121? Si es así, ¿cuánto miden la altura y la base de la figura que corresponde a dicho término?
   f) ¿Qué posición en la sucesión le corresponde a la suma 1 + 3 + 5 + 7?
   g) ¿Qué suma corresponde al séptimo término de la sucesión?
   h) ¿Cuántos cuadrados de altura tiene la enésima figura?, ¿cuántos tiene de base?
   i) Anoten la suma que corresponde al enésimo término.

Bloque 4

Observa la siguiente sucesión figurativa y realiza lo que se solicita.



a) Construye en tu cuaderno una tabla como la que se muestra a continuación y, en las celdas vacías, escribe el número de cubos que tiene cada figura, incluyendo aquellos que están ocultos.

Figura	1	2	3	4	10	n
Cubos						

b) Con base en los datos de la tabla construye una gráfica en la que el eje x represente la posición de los primeros diez términos de la sucesión.

c) ¿Existirá en esta sucesión una figura que corresponda al valor 625? En caso de ser afirmativo, ¿cuántos escalones tiene en una de sus paredes y qué lugar ocupa?

d) En esta sucesión, ¿habrá una figura conformada por 5 684 cubos? Justifica tu respuesta.

Hasta ahora, todas las sucesiones figurativas que se han presentado tienen la misma representación, aunque con apariencias distintas. En todas, la relación puede representarse mediante $s(n) = n^2$, y su gráfica corresponde a una parábola de ancho estándar, la cual parte del origen con una tangente horizontal. Recuerda el significado de los coeficientes de la siguiente expresión cuadrática:

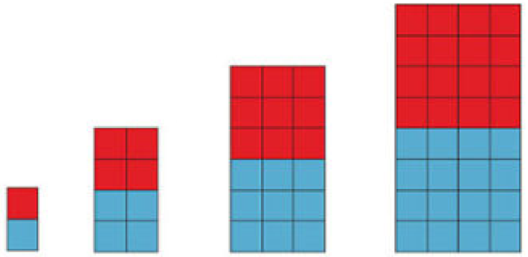
$$y = ax^2 + bx + c$$

Relaciona ambas columnas uniendo con una línea cada coeficiente con su significado.

Coeficiente	Significado
a	Ordenada al origen (punto donde la curva corta al eje y).
b	Curvatura (ancho y orientación de la curva).
c	Pendiente al origen (tendencia que lleva la curva al cruzar el eje y).

Realicen lo que se indica a continuación.

1. Observen la siguiente sucesión y respondan lo que se solicita.



a) ¿Cuáles son los primeros seis términos de la sucesión, expresados en forma numérica?

b) ¿Existe alguna pieza con 338 cuadritos? Si es así, ¿qué lugar ocupa en la sucesión? Y ¿cuántos cuadritos azules y cuántos rojos tiene?

c) Describan con palabras la figura que ocupa el enésimo lugar.

d) ¿Habrá una figura con 23 457 cuadritos?, ¿por qué?

e) ¿Habrá una figura con 121 cuadritos rojos? Si es así, ¿qué posición ocupa en la sucesión? Y ¿cuántos cuadritos tendrá en total?

2. Completen la siguiente tabla, con base en la sucesión anterior.

Lugar	3	7	11					150
Cuadritos rojos	9	49		625		9 025		
Cuadritos azules					3 969			
Total de cuadritos			242				20 402	

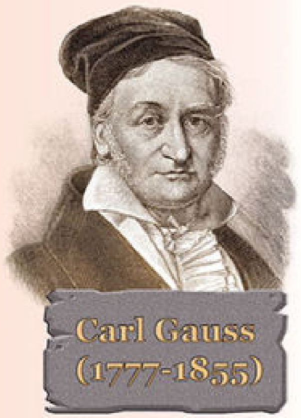
3. En una misma gráfica, usando en el eje x los valores 1 a 5, tracen la curva $y = 2x^2$, y usando los valores 1 a 10 tracen la curva $y = x^2$. ¿Cuál de las dos curvas es más angosta? ¿Qué proporción hay entre el ancho de ambas curvas?

Una sucesión figurativa puede ser muy ilustrativa para identificar el término general de una sucesión. De hecho, es también una excelente herramienta para la obtención de algunas fórmulas interesantes.

Matemáticas en el pasado

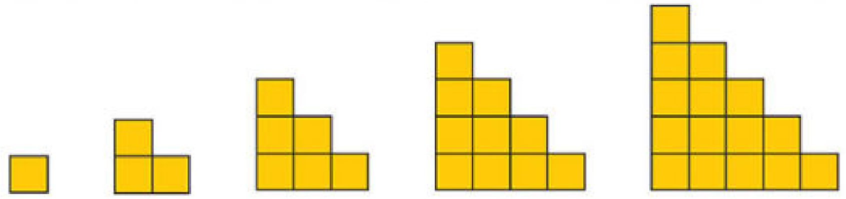
Suma de los primeros números naturales

Carl Gauss es considerado uno de los genios matemáticos más grandes de la historia. Cuando apenas era un niño de 10 años, sobresalía en su grupo a tal punto que el maestro no encontraba la forma de "tenerlo quieto" en clase. Cuenta una leyenda que, para entretenerlo al menos un rato, el profesor le propuso que calculara la suma de los primeros mil números naturales; es decir, 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + … + 1 000. De manera sorprendente, el niño Gauss le dijo de inmediato la respuesta: 500 500. ¿Cómo pudo calcular la suma tan rápido?

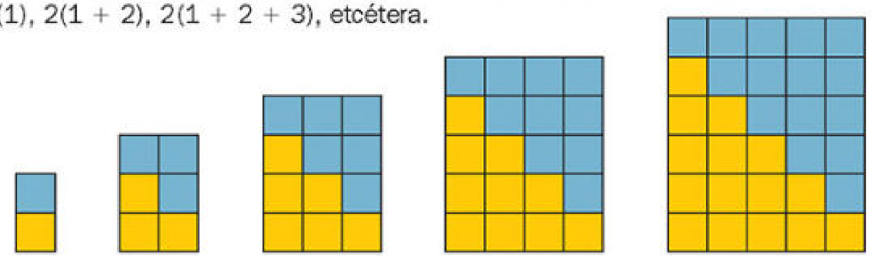


Fuente: Pérez, Sergio, 2013

Consideren las siguientes sucesiones figurativas y realicen lo que se solicita.



1. Repasando cada figura por filas, desde la más alta hasta la más baja, es posible observar que cada término corresponde a una suma 1, 1 + 2, 1 + 2 + 3, etcétera.
   a) Escriban la suma que corresponde al quinto término de la sucesión.
   b) Anoten la suma que corresponde a la figura que ocupa el lugar 7.
   c) Determinen la suma que corresponde a la figura que ocupa el lugar n.
2. Observen la siguiente sucesión en la que cada término es el doble de la sucesión anterior: 2(1), 2(1 + 2), 2(1 + 2 + 3), etcétera.



   a) Escriban la expresión que corresponde al término que ocupa el lugar 7 en la sucesión.
   b) Indiquen la expresión correspondiente al enésimo término.

Por otra parte, las figuras correspondientes a la sucesión son rectángulos y el total de cuadritos de cada término se obtiene del producto 1(2), 2(3), 3(4),...

   c) Escriban el producto del quinto término.
   d) Establezcan el producto que corresponde al enésimo término.

Si se toma como ejemplo el tercer término, se tiene la igualdad:

$$2(1 + 2 + 3) = 3(4)$$

   e) Determinen la igualdad que corresponde al enésimo término; para ello, completen la siguiente expresión:

$$2(1 + 2 + 3 + \ldots + n) =$$

   f) ¿Qué resultado se obtiene al dividir la expresión anterior entre dos? En sus cuadernos, anoten la expresión que encontraron. A ésta se le conoce como "fórmula de Gauss para obtener la suma de los primeros n números naturales".
   g) Apliquen la fórmula para calcular la suma que le fue propuesta al niño Gauss.

$$1 + 2 + \ldots + 1000$$

De manera grupal y con la orientación de su profesor respondan, ¿cómo el niño Gauss encontró la suma de los números? Formulen una expresión algebraica para representar la suma.

Figuras y cuerpos

Análisis de las características de los cuerpos que se generan al girar sobre un eje, un triángulo rectángulo, un semicírculo y un rectángulo. Construcción de desarrollos planos de conos y cilindros rectos

Reactivando el saber

Lee con atención y responde lo que se solicita.

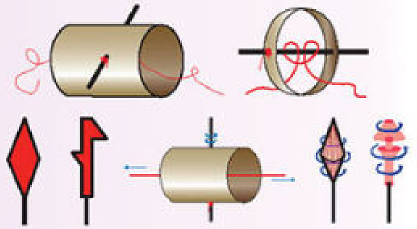
Seguramente, en tu vida diaria has utilizado figuras geométricas sólidas, por ejemplo, una cubeta, el tinaco en el que tu familia almacena agua, o quizá has tenido en tus manos una lata de refresco; como puedes observar los ejemplos mencionados tienen forma cilíndrica. Los conos también son un ejemplo de cuerpos geométricos, y es muy probable que alguna vez hayas utilizado un cono de papel para beber agua. Otro cuerpo con el que has tenido contacto al jugar pelota o al hacer burbujas de jabón es la esfera, la cual también estudiaremos en este tema.

¿Sabes cómo se obtienen estas figuras tridimensionales por medio de figuras planas al hacerlas girar? ¿Alguna vez las has trazado en un plano?

Construyendo Matemáticas

Rotaciones en el espacio

Realiza la siguiente actividad.



1. Elabora un mecanismo giratorio. Para ello necesitarás un tubo de cartón, como los del papel higiénico, hilaza, una varilla de madera de 15 a 20 cm de longitud y $\frac{1}{4}$ de pliego de papel cascarón o ilustración. Atraviesa el tubo de cartón con la varilla, como se muestra en la figura; utiliza un poco de hilaza para asegurar uno de sus extremos. Con un pedazo de hilaza da dos vueltas a la varilla dentro del tubo y deja que salga por ambos extremos.
2. Crea diferentes figuras sobre el papel cascarón y asegúralas en una de las puntas de la varilla, tal como se ilustra en la imagen. Haz girar la varilla para mover las diferentes paletas; intenta crear algunas con figuras clásicas como triángulos, rectángulos, círculos, etcétera.
3. Observa los cuerpos que se forman al girar las paletas; a éstos se les denomina **sólidos de revolución**.
   a) ¿A qué crees que se debe el nombre que reciben?
   b) ¿Es posible afirmar que todos los sólidos de revolución tienen un eje de simetría?, ¿por qué?
   c) ¿Algunos de los sólidos construidos son cuerpos que puedes encontrar en tu entorno?, ¿cuáles?

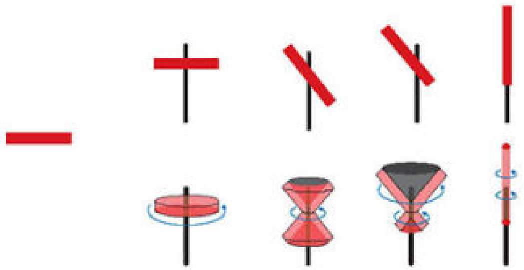
Palabra Mu

sólidos de revolución. Son cuerpos que se generan mediante la rotación de una superficie plana alrededor de un eje.

Bloque 4

Elige tres sólidos elaborados con el procedimiento anterior y descríbelos detalladamente; para ello, indica cuántas caras tienen, su forma, si son planas o curvas, si tienen vértices o aristas, y su altura; en caso de que sean círculos, reporta su radio. Relaciona las características que describas con las de las respectivas figuras que los generan.

En el espacio, como en el plano, es posible trasladar, rotar o reflejar figuras. En la actividad anterior se aplicó una rotación a una figura en el espacio; en esta ocasión, el efecto visual generado por el mecanismo giratorio es el de conservar las imágenes generadas; a esto se le denomina *conservar la traza*.



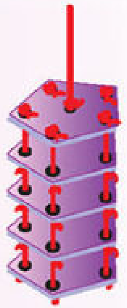
Las rotaciones aplicadas en esta actividad dependen de un eje de giro; el sólido que se obtiene depende tanto de la figura como de la posición de ésta respecto al eje de giro. Observa la imagen que muestra los sólidos que resultan usando una misma figura en diferentes posiciones.

Identifica, describe y traza en tu cuaderno las figuras que al rotar en el espacio te dan los siguientes sólidos de revolución: un cilindro, una esfera y un cono; además, señala cómo debe colocarse cada figura con respecto al eje de giro.

a) Compara tus respuestas con tus compañeros; es posible que hayan encontrado diferentes maneras correctas de generar los cuerpos que se piden.
b) Identifica la figura con menor superficie que puede generar a cada sólido.
c) Determina la figura que origina a cada sólido al rotarla con respecto a su eje de simetría.

Traslaciones en el espacio

Realiza la siguiente actividad y responde lo que se solicita.



Elabora un móvil en forma de prisma. Para ello, en papel cascarón, traza una figura plana y produce varias copias idénticas. Perfora todas las figuras en los mismos puntos y haz nudos que las sostengan, de tal manera que haya una distancia constante entre ellas. Utiliza diversas figuras para crear diferentes sólidos de revolución. Observa el trabajo de tus compañeros y expongan sus móviles al resto del grupo.

Con base en lo anterior, responde las siguientes preguntas.

a) ¿Qué tipo de sólidos se generan al trasladar polígonos por un eje perpendicular al plano en el que fueron trazados?
b) ¿Qué tipo de sólidos se forman al trasladar figuras con lados curvos mediante este procedimiento?
c) ¿Es posible crear un cilindro por traslación perpendicular al plano? Si es así, ¿cómo es la figura que lo origina?
d) ¿Es posible obtener conos o esferas mediante este procedimiento? Explica cómo.
e) ¿Se puede crear un cubo mediante este procedimiento? Describe la manera.

Como podrás darte cuenta, existen múltiples modos de crear sólidos en el espacio tridimensional a través de transformaciones de figuras planas sin alterar sus proporciones. Más adelante veremos que, con base en estos sólidos, es posible crear nuevas transformaciones de las figuras planas que tienen otras propiedades.

Con los tres procedimientos anteriores, seguramente habrás notado que algunos sólidos pueden crearse a partir de diferentes figuras planas. Reflexiona sobre ello y describe las diferentes maneras en que pueden crearse los siguientes sólidos: cubo, prisma rectangular, cono, pirámide triangular, esfera y cilindro.

1. Identifica qué sólidos pueden crearse con los distintos métodos que has utilizado en este bloque.
   a) ¿Cuáles pueden elaborarse mediante rotación respecto a un eje?
   b) ¿Cuáles con el método de traslación?
   c) ¿Cuáles pueden generarse mediante proyección homotética?

2. Reflexiona sobre la relación entre los métodos que permiten construir cada sólido y las propiedades de simetría de éstos en el espacio. Para ello, identifica a los que:
   a) Son simétricos respecto a un solo eje
   b) Son simétricos respecto a varios ejes
   c) Son simétricos respecto a un número infinito de ejes
   d) Al ser cortados por cierto plano paralelo a la base resultan dos figuras idénticas (simétricas respecto a un plano)
   e) Al ser cortados por cierto plano perpendicular a la base resultan dos figuras idénticas (otro tipo de simetría respecto a un plano)
   f) Al ser cortados por planos paralelos a la base generan figuras semejantes a dicha base

Sólidos de revolución

Estos sólidos pueden tener infinidad de formas, dependiendo de las figuras que los originen, pero todos ellos son simétricos respecto al eje de rotación. Hemos visto tres sólidos especiales, llamados cuerpos redondos: el cilindro, el cono y la esfera.

Mediante traslaciones del plano en una dirección, también es posible obtener cilindros rectos u oblicuos, de acuerdo con la dirección elegida. Otra manera de construir sólidos es proyectando las figuras hacia un punto fuera de su plano, con lo que se generan conos rectos u oblicuos, en correspondencia con el punto elegido.

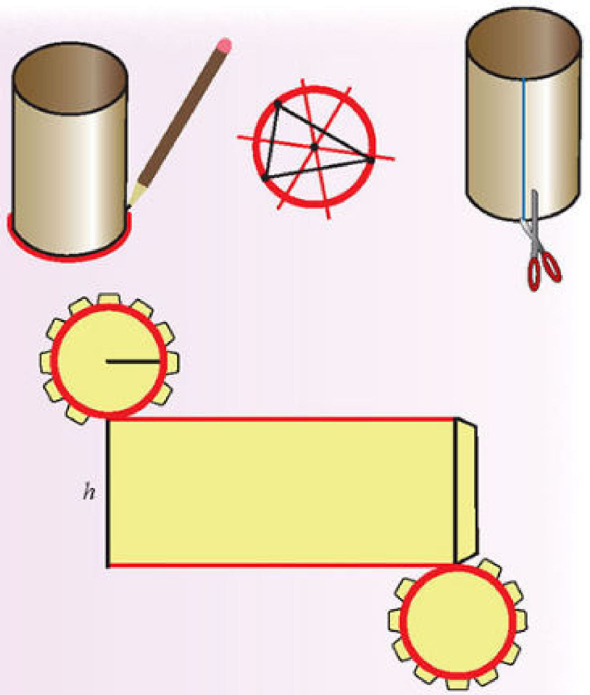
En la siguiente sección realizarás la construcción de los cuerpos redondos a partir de un desarrollo plano.

Construyendo Matemáticas

Desarrollo plano de un cilindro

Realiza la siguiente actividad.

1. Coloca sobre una cartulina un tubo de cartón, puedes utilizar el del papel higiénico, siempre y cuando se encuentre en buen estado; marca su circunferencia. Córtalo en línea recta a lo largo, desdóblalo y dibuja su contorno sobre la cartulina.
2. Mide el radio del círculo que creaste y elabora otro con las mismas dimensiones; éstos serán las bases del cilindro. Junta las tres piezas y agrégales pestañas para que puedas pegarlo.
3. Observa cuidadosamente tu cilindro y responde las siguientes preguntas.



a) Si el cilindro tiene altura h y base de radio r, ¿cuánto deben medir los lados del rectángulo que formará su cara curva?

b) Utiliza la información que tienes para construir un cilindro con 8 cm de altura y 4 cm de radio.

c) Identifica la figura que te permitiría crear ese cilindro mediante rotación; determina el eje y las medidas de la figura.

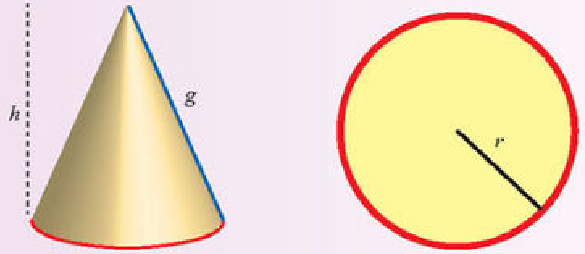
Desarrollo plano de un cono

1. Sobre una cartulina, traza la circunferencia de la base de un cono de los que se usan para beber agua. Córtalo en línea recta desde su base hasta el vértice; las rectas que van sobre la superficie del **cono**, del vértice a la base, reciben el nombre de **generatrices**.

Palabra Mu

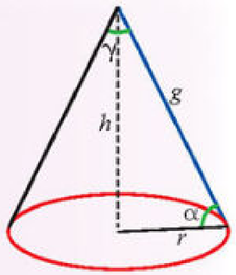
cono. Sólido limitado por un plano que corta a una superficie cónica cerrada.

generatriz. Línea exterior de una superficie que al girar en un eje crea un sólido de revolución.



Desdobla el cono, copia su superficie sobre la cartulina y pégalo junto a la base dibujada. Obtendrás un desarrollo plano, formado por un círculo de radio r y un segmento circular cuyo radio es g.

2. A partir de la imagen de la derecha y la expresión $g^2 = r^2 + h^2$, calcula los valores que se solicitan.



a) Expresa el valor de g en función de r y h

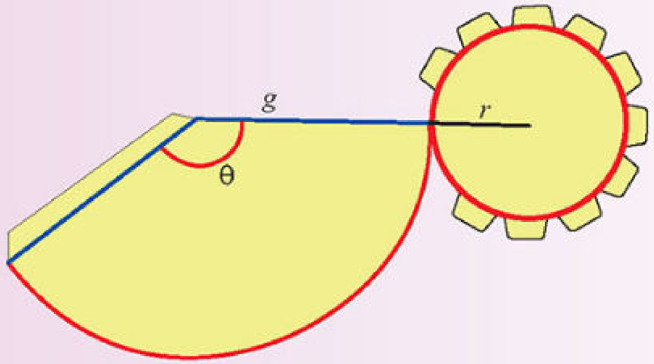
b) Indica el valor de h en función de r y g

c) Señala el valor de $tan(\alpha)$ en función de r y h

Para calcular el valor de θ, a partir de $tan(\alpha)$, usa la tecla tan^{-1} de tu calculadora, con lo que se obtiene el valor del ángulo, conociendo su tangente.

d) Expresa el valor de γ en función de θ

e) ¿Cómo calculas el ángulo θ en el sector circular?



Para resolver este problema debes comparar los perímetros $2\pi r$ (correspondiente al círculo de radio r) y $2\pi g$ (del círculo de radio g).

f) ¿Cuánto mide el arco en el desarrollo plano de la cara curva del cono?

- 360° corresponden a la circunferencia completa, por lo que el ángulo θ que buscas debe cumplir con lo siguiente:

$$\frac{360}{\theta} = \frac{2\pi g}{2\pi r}$$

g) Escribe el valor que debe tener el ángulo α en función de r y g

h) Anota el valor del ángulo α en función del ángulo θ

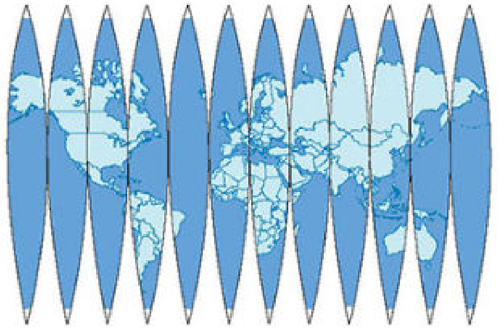
i) Utiliza la información que tienes para construir un cono con altura de 8 cm y radio de 2.5 cm

j) ¿Cuánto debe medir la generatriz de este cono?

k) ¿Cuánto debe medir el ángulo θ de este cono?

Bloque 4

La esfera



Desafortunadamente, no es posible construir el desarrollo plano de una esfera. Los cartógrafos han enfrentado este problema desde que se sabe que la Tierra es casi esférica; los mapas que se hacen de la superficie terrestre tienen la limitante de que siempre la deformarán al intentar copiarla en el plano. El intento más simple de "desarrollo plano" de una esfera es el de la imagen.

Este modelo puede doblarse y pegarse para obtener un objeto parecido a una esfera, aunque en realidad es más como un balón de futbol americano.

Los resultados de la geometría plana no valen sobre la superficie de la esfera porque, aunque en entornos pequeños parece plana, en realidad no lo es. La superficie de la esfera tiene una **curvatura** constante diferente de la que tiene un plano (que también tiene curvatura constante con valor cero); es decir, la geometría de la esfera es igual en todos los puntos y por supuesto diferente de la geometría del plano, un ejemplo de ello es que la suma de los ángulos internos de todo triángulo sobre la esfera es mayor que 180°.

Palabra Mu

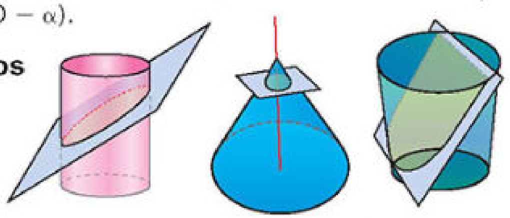
curvatura. Relación entre la variación de la inclinación de la tangencia a una curva plana y la longitud del arco considerado.

Desarrollos planos

El desarrollo plano de un cilindro recto consiste en un rectángulo que será curvado para generar el cuerpo y dos circunferencias de igual tamaño que formarán sus dos bases. Las medidas necesarias para trazar el plano del cilindro quedan determinadas en función del radio r de las bases y la altura h del rectángulo que será la cara curva, mientras que su base debe coincidir con el perímetro de la circunferencia $P = 2\pi r$.

El desarrollo plano de un cono recto consiste en una circunferencia que será su base, cuyo radio es r, y un sector circular que coincide con el perímetro de la base, de radio g, que corresponde a la generatriz del cono. La relación entre las medidas de la generatriz g, la altura h y el radio r del cono, está determinada por el teorema de Pitágoras de la siguiente manera: $g^2 = r^2 + h^2$. Como la medida del arco debe corresponder al perímetro de la base $\left(\frac{360}{\theta} = \frac{rg}{2\pi r}\right)$, puede deducirse que el ángulo del sector circular será: $\theta = 360\frac{rg}{2\pi r}$, o bien: $\theta = 360\frac{rg}{\sqrt{r^2+h^2}}$, relación que es muy útil, ya que en ocasiones se conoce la altura y en otras la generatriz. El ángulo formado por cualquier diámetro de la base del cono con cualquier generatriz, será aquel cuya tangente sea: $\frac{h}{r}$ o cuyo coseno sea: $\frac{r}{g}$, El ángulo formado en el vértice del cono será $\gamma = 2(90 - \alpha)$.

Haciendo cortes sobre los cuerpos geométricos



Al procedimiento de cortar un cuerpo sólido mediante una superficie plana se le denomina *intersección*, que es el conjunto de puntos que corresponden tanto al sólido como al plano. El estudio de las figuras resultantes de las intersecciones de sólidos con planos cobra especial importancia en las llamadas secciones cónicas. En el siguiente bloque identificarás y analizarás algunas propiedades de éstas y otras secciones.

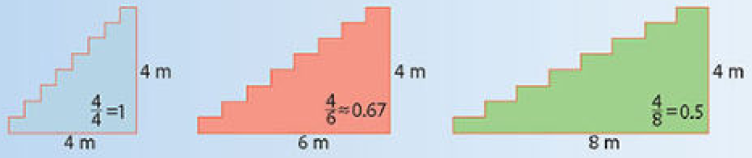
Medida

Análisis de las relaciones entre el valor de la pendiente de una recta, el valor del ángulo que se forma con la abscisa y el cociente del cateto opuesto sobre el cateto adyacente

Reactivando el saber

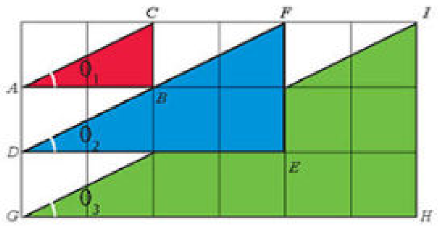
Reflexiona en torno a la siguiente situación.

Imagina que en una bodega hay un tapanco a 4 m de altura, al que se puede subir por tres escaleras distintas. Por las necesidades del espacio, aunque las tres escaleras suben la misma altura, son de diferentes longitudes, tal como se muestra en la siguiente figura.



Cada escalera requiere un esfuerzo distinto para subirla. Una forma matemática de medirlo es dividiendo "lo que se sube" entre "lo que se avanza". A este coeficiente se le llama "pendiente" y resulta ser 1 para la escalera más inclinada, 0.67 para la intermedia y 0.5 para la menos inclinada.

Observa los triángulos que están trazados sobre una malla de 6 × 3 unidades. Después responde lo que se solicita.



a) Calcula las pendientes de los segmentos $\overline{AC}$, $\overline{DF}$ y $\overline{GI}$.

b) ¿Son semejantes los triángulos ABC, DEF y GHI?, ¿por qué?

c) ¿Cómo se relacionan los ángulos θ_1, θ_2 y θ_3?

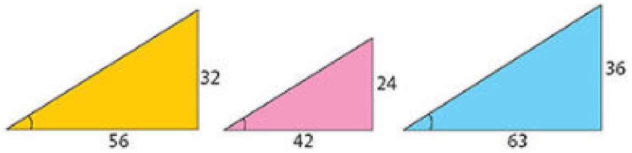
d) ¿Cómo se relacionan las pendientes de $\overline{AD}$, $\overline{DF}$ y $\overline{GI}$?

e) ¿Qué le sucede a la pendiente de un segmento si su ángulo de inclinación aumenta? ¿Qué le pasa si el ángulo disminuye?

f) ¿Cómo se ve un segmento cuya pendiente es 0?

g) ¿Qué ángulo de inclinación tiene un segmento cuya pendiente es 1?

Consideren la siguiente familia de triángulos rectángulos semejantes y realicen lo que se solicita a continuación.



Bloque 4

1. Califiquen como falso [F] o verdadero [V] cada uno de los siguientes enunciados.
   a) El ángulo es el mismo en los tres triángulos porque…
      - Las hipotenusas de los tres son paralelas cuando los catetos adyacentes son paralelos .... [ ]
      - Las hipotenusas tienen la misma longitud .... [ ]
      - Los catetos opuestos forman progresión aritmética .... [ ]
      - Las pendientes de las hipotenusas son las mismas .... [ ]
      - Si se hacen coincidir en el ángulo escogido, las hipotenusas quedan sobre la misma recta .... [ ]
      - Si se forma con ellos una escalera, las hipotenusas quedan alineadas .... [ ]
      - El producto c.opuesto × c.adyacente es el mismo .... [ ]
      - El cociente $\frac{\text{c. opuesto}}{\text{c. adyacente}}$ es el mismo .... [ ]

Observen que para cada uno de los triángulos anteriores la relación de proporcionalidad $\frac{\text{c. opuesto}}{\text{c. adyacente}}$ permanece constante, es decir:

$$\frac{24}{42} = \frac{32}{56} = \frac{36}{63}$$

Estas relaciones, simplificadas, ¿cuánto dan?, ¿qué significa esto? Explícalo con la siguiente figura.

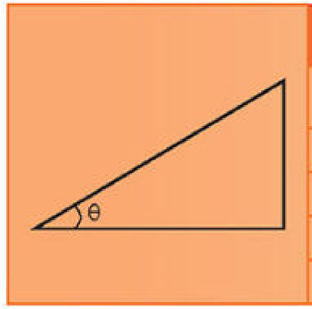
Esta relación es una forma de representar al ángulo y se conoce como "tangente trigonométrica del ángulo θ".

Cuando no existían las calculadoras, la forma de encontrar un ángulo a partir de su tangente trigonométrica o de determinar la tangente trigonométrica de un ángulo conocido, era mediante tablas matemáticas. En la actualidad, una calculadora científica resuelve ambos problemas con sólo oprimir una tecla.

Resuelvan lo que se solicita a continuación, para ello utilicen una calculadora científica que cuente con las teclas de funciones trigonométricas, como las que aparecen en la ilustración.

1. Consideren triángulos rectángulos, como el de la tabla, para distintos valores de sus catetos y calculen la tangente trigonométrica del ángulo θ. Para encontrar la medida del ángulo a partir de la tangente, ¿recuerdan cuál tecla se usa?

La calculadora puede estar en modo grados (*deg*), radianes (*rad*) o gradientes (*grad*). Utilícenla en modo grados para completar los datos faltantes de la tabla.



a	b	$\tan\theta = \frac{a}{b}$	$\theta = \tan^{-1}\frac{a}{b}$
1	2	$\frac{1}{2}$	26.56°
24	48		
3	5		
$\sqrt{3}$	1		
5	5		

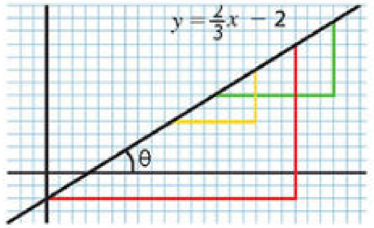
2. Usen ahora la tecla *tan* para calcular la tangente trigonométrica de varios ángulos dados en grados y observen lo que pasa.

Al ver que cuando el ángulo crece su tangente trigonométrica también crece.

   a) ¿Es adecuado dar una medida de la inclinación o pendiente de una recta, a través de la tangente del ángulo que forma la recta con la horizontal? Justifiquen su respuesta.

La pendiente de una recta es la clave para conocer su ángulo de inclinación con respecto al eje x. A mayor pendiente, mayor ángulo. En la siguiente gráfica se ha considerado una recta que tiene cierto ángulo de inclinación con respecto al eje x, y también puede apreciarse que pasa por algunos puntos cuyas coordenadas son fáciles de identificar.

Realicen lo que se solicita a continuación.

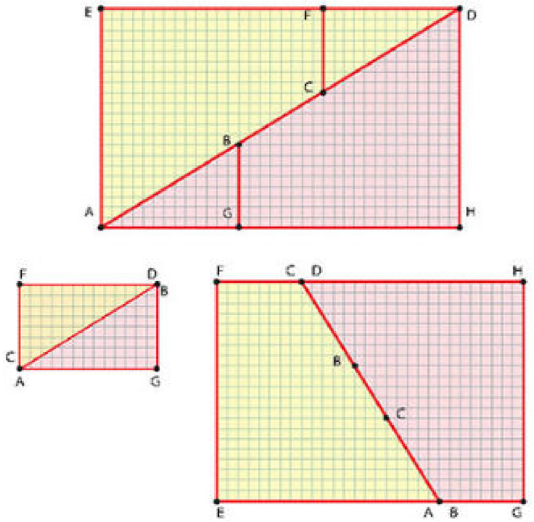


a) Calculen la tangente del ángulo θ usando los triángulos rojo, amarillo y verde. ¿Por qué coinciden estos tres valores?
b) ¿Qué relación tiene el valor que calcularon con el coeficiente de x en la ecuación de la recta que se muestra dentro de la gráfica?
c) ¿Cuál es la pendiente de la recta?
d) Usen su calculadora para estimar cuánto mide el ángulo θ a partir de la pendiente de la recta.

¿Dónde quedó el cuadrito?

Un acertijo que desconcierta a primera vista es el siguiente: un rectángulo consta de $34 \times 21 = 714$ cuadritos. Si se recorta por las líneas rojas, con las cuatro piezas se pueden formar dos rectángulos.

Éstos constan de $21 \times 29 = 609$ y $8 \times 13 = 104$ cuadritos, cuya suma hace $609 + 104 = 713$ cuadritos, pero el rectángulo original tenía 714 cuadritos. ¿Dónde quedó el cuadrito que falta?



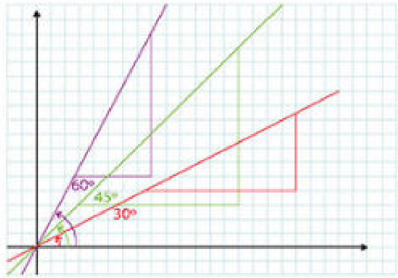
Bloque 4

Reúnanse con dos compañeros, analicen el acertijo y encuentren el error. Discutan en torno al problema a partir de las siguientes preguntas.

1. ¿Realmente el segmento diagonal $\overline{AD}$ contiene a los puntos B y C? ¿Cómo lo averiguarían? ¿Podrían hacerlo sólo con mirar la figura, o tendrían que apoyarse en algunos cálculos?
2. Compartan el resultado de su análisis con otros equipos y pónganse de acuerdo en la forma en que pueden verificar si los segmentos $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ y $\overline{CD}$ son paralelos.
   a) ¿En el rectángulo original, el punto B, está arriba o abajo del segmento $\overline{AD}$?
   b) ¿En ese mismo rectángulo, el punto C, está arriba o abajo del segmento $\overline{AD}$?
   c) Tracen el segmento $\overline{AD}$ y en forma exagerada representen las posiciones relativas de los puntos B y C con relación al segmento.
   d) ¿Son $AEFC$ y $BGHD$ verdaderos trapecios? ¿Por qué?
   e) Si estos "trapecios" se empalman en el rectángulo $EGHF$, ¿qué área de cada "trapecio" hay en ese empalme? ¿Qué área total se pierde sumando las áreas del empalme?
3. ¿Dónde quedó el cuadrito?

Como se vio en la actividad anterior, la pendiente de una recta tiene relación con el ángulo de inclinación de la misma respecto al eje x, que también es útil para saber si dos rectas son paralelas o si tres puntos son colineales, es decir, si se encuentran en una misma recta.

Analicen la siguiente gráfica y realicen lo que se solicita.



1. Con ayuda de una regla graduada y transportador, tracen en sus cuadernos tres líneas rectas, con ángulos de inclinación de 30°, 45° y 60°, como las que se muestran en la gráfica.
2. Usen una regla graduada para medir, aproximadamente, los catetos opuestos y adyacentes de los triángulos rectángulos construidos para cada recta, y úsenlos para completar la tabla.

Ángulo	Medida de los catetos		Pendiente	Tangente del ángulo
	Opuesto	Adyacente		
30°				
45°				
60°				

3. Comparen los resultados de las dos últimas columnas. ¿Deberían ser iguales para cada recta? Si no lo son, ¿por qué ocurre esto?

Comparen sus resultados con los de otros equipos.

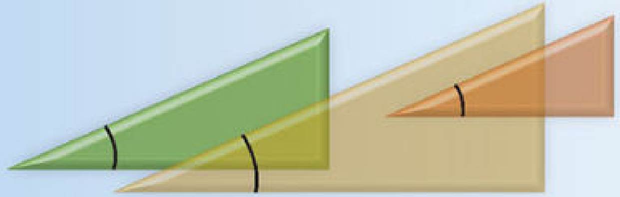
Análisis de las relaciones entre los ángulos agudos y los cocientes entre los lados de un triángulo rectángulo

Reactivando el saber

Realiza lo que se solicita a continuación.

En el tema anterior se dijo que existe una relación estrecha entre el valor de un ángulo de inclinación de una recta y su pendiente. ¿Recuerdas qué es la tangente de un ángulo? Observa la siguiente imagen y mide los lados y ángulos de cada triángulo.

¿Qué es lo que observas? Saca la tangente al ángulo que se indica en cada triángulo, ¿cuál es el resultado?

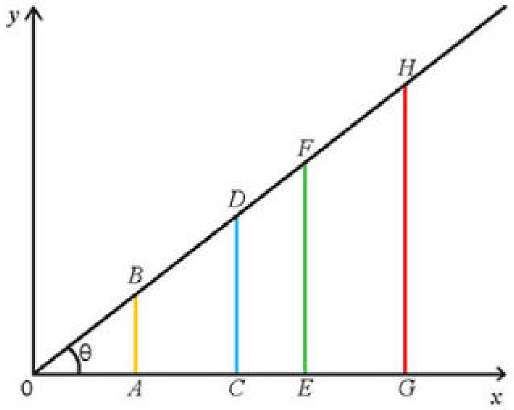


Compara sus tamaños, ¿cambia la forma de los triángulos?, ¿qué tienen en común?

Como podrás ver en la siguiente actividad, hay otros métodos para establecer una longitud de un triángulo rectángulo. Se trata de las funciones trigonométricas *seno* y *coseno*, además de la *tangente*.

Con ayuda de una regla graduada y un transportador, realicen lo que se solicita a continuación.

1. Con la regla graduada y el transportador tomen las medidas necesarias de la siguiente gráfica; procuren la mayor precisión posible.



Bloque 4

2. La siguiente tabla se refiere a triángulos rectángulos de distintas dimensiones, pero con la misma forma. Complétenla y respondan lo que se solicita.

Triángulo	Ángulo θ (grados)	Cateto opuesto (mm)	Cateto adyacente (mm)	Hipotenusa (mm)	$sen\ \theta = \frac{\text{c. opuesto}}{\text{hipotenusa}}$	$cos\ \theta = \frac{\text{c. adyacente}}{\text{hipotenusa}}$	$tan\ \theta = \frac{\text{c. opuesto}}{\text{c. adyacente}}$
OAB							
OCD							
OEF							
OGH							
Promedios por cada columna:							
Ángulo que da la calculadora:							

a) ¿Cómo son los valores del seno, coseno y tangente para cada ángulo?

b) ¿Son los mismos resultados?, ¿cómo lo explicarían?

c) Si no son iguales, usen el promedio de cada uno de los tres valores, y determinen con la calculadora científica el valor del ángulo que corresponde; para ello usen las funciones sin^{-1}, cos^{-1} y tan^{-1}.

d) Comparen los valores obtenidos entre sí con la medida que obtuvieron usando su transportador.

e) Contrasten sus resultados con los de otros equipos.

3. Discutan en torno a las siguientes preguntas, respóndanlas y, en todos los casos, justifiquen sus respuestas.

a) ¿Será suficiente conocer un ángulo agudo de un triángulo rectángulo para indicar el otro ángulo, los catetos y la hipotenusa?

b) ¿Bastará con saber un ángulo agudo y la hipotenusa para establecer ambos catetos?

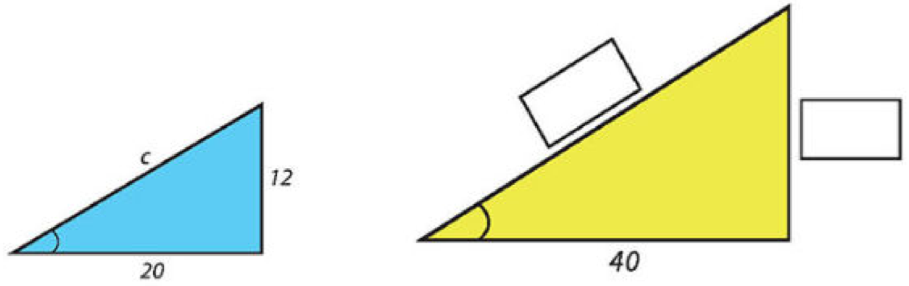
c) Si sólo están dados el ángulo agudo y uno de los catetos, ¿podrá determinarse la hipotenusa?

d) Si sólo se han establecido los catetos, ¿será posible indicar el ángulo y la hipotenusa?

4. Se dice que un triángulo rectángulo está resuelto si se conocen sus catetos, su hipotenusa y sus ángulos, es decir, todas sus medidas.

a) ¿Cuántos datos se necesitan y bastan para resolver un triángulo rectángulo?

Observa las figuras que aparecen a continuación y responde lo que se solicita.



El triángulo que se muestra a la derecha no es más que una ampliación del triángulo de la izquierda.

a) Si el cateto adyacente se duplicó, ¿cuánto mide ahora el cateto opuesto ampliado?

b) ¿Cuánto mide la hipotenusa ampliada?

c) ¿Cuánto mide el ángulo θ en el triángulo ampliado?

Recuerda las siguientes fórmulas:

$$sen\ (\theta) = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}} \quad (1)$$

$$cos\ (\theta) = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}} \quad (2)$$

$$tan\ (\theta) = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}} \quad (3)$$

Cada una de éstas te permite calcular un tercer dato a partir de dos; por ejemplo, si conoces la hipotenusa y el ángulo, con la fórmula adecuada podrías calcular el cateto adyacente y el opuesto.

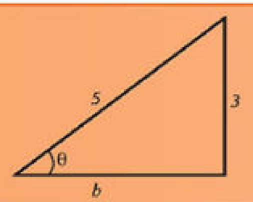
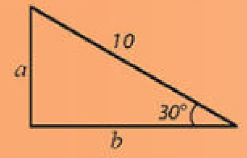
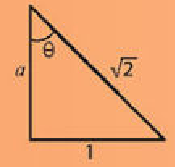
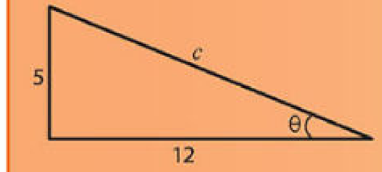
Analicen las siguientes situaciones y respondan las preguntas.

1. En un triángulo rectángulo se conocen el ángulo agudo y la hipotenusa… ¿Con qué fórmula puede calcularse el cateto adyacente y con cuál el opuesto?

2. Si se conocen el ángulo y el cateto opuesto… ¿Con qué fórmula puede establecerse la hipotenusa y con cuál el cateto adyacente?

3. Si tuviesen el cateto opuesto y el adyacente… ¿Con qué fórmula calcularían la hipotenusa?, ¿con qué fórmula calcularían el ángulo?

4. Apliquen la fórmula conveniente para resolver cada uno de los triángulos que aparecen a continuación.

	Cateto opuesto a	Cateto adyacente b	Hipotenusa c	Ángulo θ
	3		5	
			10	30°
	1		$\sqrt{2}$	
	5	12		

Comparen sus resultados con los de sus compañeros y, cuando no coincidan, revisen si cometieron algún error.

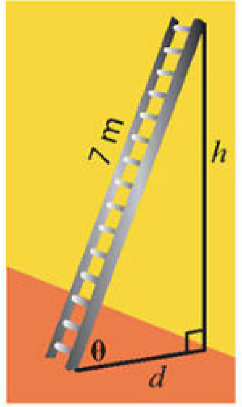
Completa los siguientes enunciados con la finalidad de que recuperes algunos conceptos de geometría.

a) En todo triángulo, la suma de sus ángulos internos es __________________.

b) Dos ángulos son complementarios si suman __________________.

c) Como en todo triángulo, uno de sus ángulos es recto, los otros dos son ángulos __________________, porque suman __________________.

Factores reductores de proyección



Considera el siguiente escenario: Una escalera de 7 m de longitud se recarga sobre una pared vertical y un piso horizontal, de manera que alcanza una altura h y queda separada de la pared a una distancia d, como se ve en la figura. Si h y d son conocidas, el ángulo θ puede calcularse de varias formas, usando la tangente, o el seno y el coseno. Si el ángulo es conocido, h y d pueden calcularse también usando el seno y el coseno:

Por ejemplo, como $sen(\theta) = \frac{h}{7}$, multiplicando la expresión por 7 se obtiene:

$$h = 7sen(\theta).$$

Por otro lado, como $cos(\theta) = \frac{d}{7}$, al multiplicar por 7 resulta:

$$d = 7cos(\theta).$$

En las dos expresiones anteriores puede verse que la hipotenusa reduce su tamaño cuando es proyectada: $sen(\theta)$ la reduce y la proyecta hacia el cateto opuesto, mientras que el $cos(\alpha)$ la reduce y la proyecta hacia el lado adyacente.

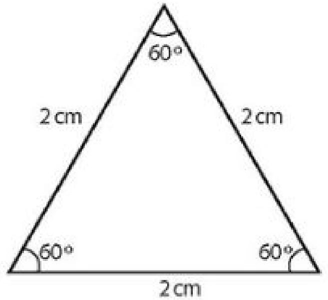
Con base en la información anterior respondan lo que se solicita.

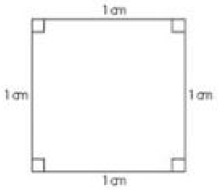
a) En un triángulo rectángulo, ¿es posible que el cateto opuesto o el adyacente sean mayores que la hipotenusa?

b) ¿Puede el $sen(\theta)$ o el $cos(\theta)$ tomar un valor mayor a 1, para algún ángulo? Expliquen por qué.

c) ¿Por cuánto debe multiplicarse la hipotenusa de un triángulo rectángulo para obtener el cateto opuesto?, ¿y por cuánto para obtener el adyacente?

Algunos ángulos especiales permiten conocer su seno, coseno y tangente sin necesidad de usar calculadora. Corrobórenlo resolviendo los siguientes ejercicios.

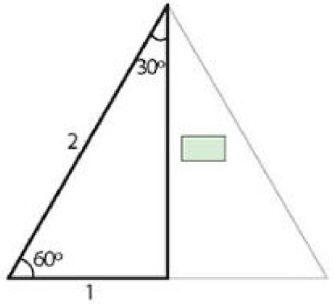


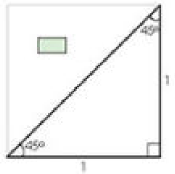


1. Observen las figuras: un triángulo equilátero de lado 2 cm y un cuadrado de lado 1 cm.

   a) Al partirlas por un eje de simetría se obtienen las figuras de la derecha.

   b) Usen el teorema de Pitágoras para calcular el lado que falta en cada uno de los triángulos.





Bloque 4

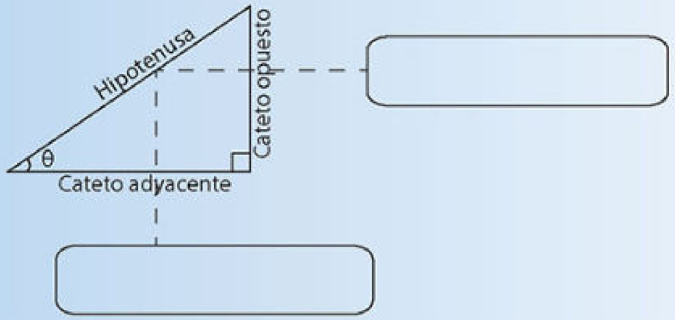
Explicitación y uso de las razones trigonométricas seno, coseno y tangente

Relación geométrica entre seno, coseno y tangente

Reactivando el saber

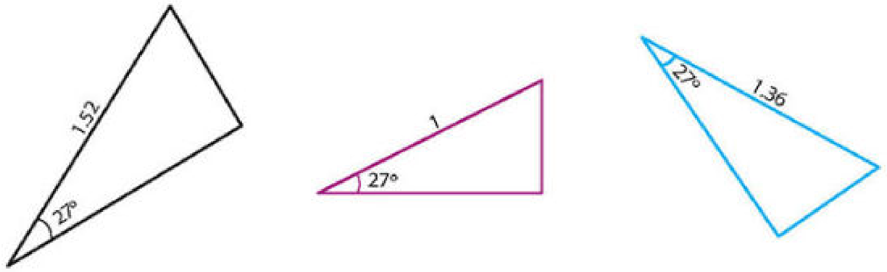
Analiza la información y realiza lo que se solicita.

El seno y el coseno de un ángulo funcionan como factores de reducción que al multiplicarse por la longitud de la hipotenusa, la convierten en las longitudes de los catetos opuesto y adyacente de un triángulo rectángulo. Coloca en los recuadros de la siguiente figura el factor reductor que corresponda:



Realicen la siguiente actividad.

Los triángulos que aparecen a continuación tienen un ángulo agudo de 27°, con distintos valores de la hipotenusa. Sabiendo que $sen(27°) = 0.454$ y $cos(27°) = 0.892$, usen el factor correspondiente para proyectar la hipotenusa hacia los catetos, y escriban sobre cada uno su valor.



a) ¿En cuál de las figuras aparecen el seno y el coseno de 27° en forma directa?

b) Completen el enunciado: Si en un triángulo rectángulo de ángulo θ la hipotenusa mide 1, el cateto opuesto mide ____________ y el adyacente mide ______________.

c) Expresen lo mismo pero en forma gráfica, conectando cada medida con el lado que le corresponda.

Si en un triángulo rectángulo, su hipotenusa mide 1, entonces las longitudes de los catetos son, según corresponda, el seno y el coseno del ángulo.

Explora

Ingresa a la siguiente página de internet: http://www.geogebratube.org/student/m35760 En ella, la figura muestra un círculo de radio 1, en el que puedes variar el ángulo moviendo la barra deslizadora. Observa cómo cambian las longitudes de los segmentos rojo, azul y violeta, que son catetos de alguno de los triángulos rectángulos que se forman ahí.

a) ¿Podrías explicar por qué la longitud del segmento rojo es el seno del ángulo?

b) ¿Por qué la longitud del azul es el coseno?

c) ¿Por qué la del segmento violeta es la tangente?

d) ¿Cuánto vale $sen^2(\theta) + cos^2(\theta)$?

e) ¿Por qué el ángulo de la tangente es 1?

f) ¿Qué le pasa a la tangente cuando el ángulo se acerca a 90°?

(Consulta: 13 de octubre de 2014).

Analiza las figuras de la aplicación interactiva de la actividad anterior y responde lo siguiente.

a) Mientras mueves el punto P sobre el primer **cuadrante**, ¿qué le ocurre al $sen(\theta)$ cuando el ángulo crece?, ¿qué le sucede al coseno?, ¿qué pasa con la tangente?

b) ¿Es cierto que mientras el seno crece el coseno decrece?

Palabra Mu

cuadrante Es una de las cuatro secciones iguales en que se divide un plano cartesiano.

c) Observa que el enunciado anterior se precisa a través de la relación, $sen^2(\theta) + cos^2(\theta) = 1$, pues asegura que son los cuadrados de seno y coseno los que complementan a 1. ¿De dónde sale esta relación?

d) ¿Cuánto valen $sen(0)$, $cos(0)$ y $tan(0)$?

e) ¿Cuál es el valor máximo del seno y en qué ángulo lo alcanza?

f) ¿Cuál es el valor máximo del coseno y en qué ángulo lo alcanza?

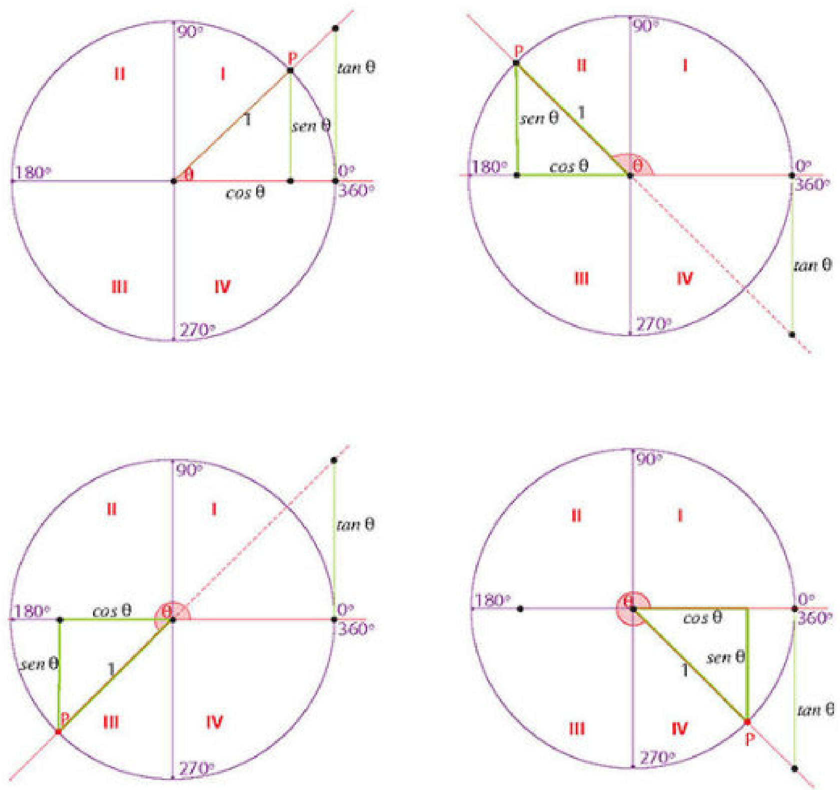
g) ¿Tiene la tangente un valor máximo?, ¿cuál?

Las funciones seno, coseno y tangente dependen exclusivamente del ángulo y pueden ser positivas o negativas. En el primer cuadrante, las tres son positivas. Para conocer su signo, en el círculo unitario sólo se juzga la orientación de cada segmento; si del eje x, el segmento parte hacia arriba, el seno es positivo, caso contrario negativo; si del eje y, el segmento parte hacia la derecha el coseno es positivo, caso contrario es negativo. El signo de la tangente es positivo cuando seno y coseno tienen el mismo signo, en caso contrario es negativo.

Bloque 4

Realiza lo que se solicita a continuación.

1. Analiza el círculo unitario de las figuras.



a) Observa el círculo unitario para distintos valores del ángulo y completa la tabla con los signos correspondientes a cada función, según el cuadrante.

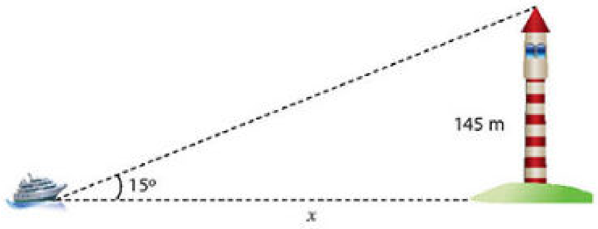
Cuadrante	Signo de x	Signo de y	Signo de *sen*	Signo de *cos*	Signo de *tan*
I	+	+	+	+	+
II					
III					
IV					

- ¿En qué cuadrantes es positivo el seno y en cuáles negativo?
- ¿En qué cuadrantes es positivo el coseno y en cuáles negativo?
- ¿En qué cuadrantes es positiva la tangente y en cuáles negativa?

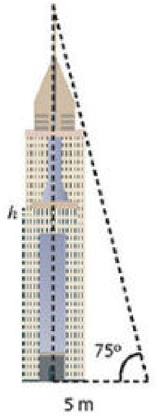
El estudio de las funciones seno, coseno, tangente y otras tres que son recíprocas a éstas (cosecante, secante y cotangente) forma parte de una disciplina matemática denominada *trigonometría*, cuyo objetivo es estudiar las relaciones de los ángulos con los lados de cualquier triángulo rectángulo y se puede utilizar para analizar cualquier figura plana que pueda descomponerse en triángulos rectángulos.

Analicen los siguientes problemas; discutan el procedimiento que utilizarían para resolverlos y resuélvanlos.

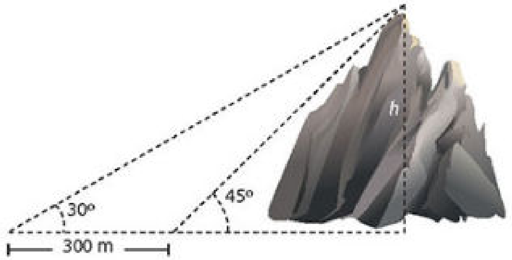
1. La luz de un faro, cuya altura sobre el nivel medio del mar es de 145 m, es vista a la distancia desde un barco, a una elevación de 15°. ¿A qué distancia se encuentra el barco del faro?



2. Calcula la altura de una torre, si a una distancia de 5 m de su base se ve la parte más alta sobre un ángulo de 75°.



3. Dos amigos subirán una montaña, pero desconocen su altura. Se dirigen en línea recta hacia ésta y en cierto punto miden el ángulo de elevación, que es de 30º. Al avanzar 300 m vuelven a medirlo y ahora es de 45º. ¿Cuál es la altura de la montaña?v



a) Las siguientes preguntas pueden ser de utilidad para que resuelvan este problema: ¿Cuánto miden los catetos adyacentes de ambos triángulos? ¿A qué es igual su diferencia?

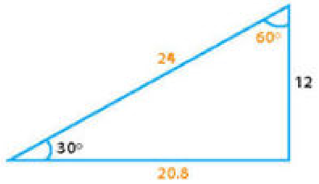
Comparen sus resultados con los de otras parejas, especialmente en aquellos problemas en los que tuvieron dudas. Si los resultados no coinciden, discutan el procedimiento que emplearon y con la guía de su profesor lleguen a una conclusión.

Con base en la siguiente tabla, traza en tu cuaderno el triángulo que corresponde a cada renglón. Cuando sea necesario, redondea tus respuestas a un decimal. Observa el ejemplo que se da para el primer renglón:

1 Como $\alpha + \beta = 90°$, resulta $\beta = 90° - \alpha = 90° - 30° = 60°$

2 Como $sen(\alpha) = \frac{a}{c}$, resulta $c = \frac{a}{sen\ \alpha} = \frac{12}{sen(30°)} = 24$

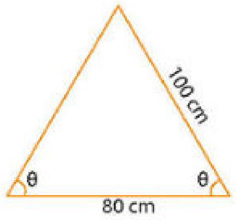
3 Como $cos(\alpha) = \frac{1}{c}$, resulta $b = \frac{a}{tan(\alpha)} = \frac{12}{tan(30°)} \approx 20.8$



a	b	c	α	β
12	3	2	30°	1
15			57°	
	42			48°
		7	75°	
5	12			
3		5		

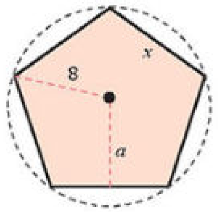
Las razones trigonométricas sólo pueden aplicarse donde hay triángulos rectángulos. En muchos problemas, los triángulos rectángulos no son tan evidentes, pero es posible trazarlos para hacer uso de las propiedades ya conocidas.

Analicen y resuelvan los problemas que se presentan a continuación.



1. La base de un triángulo isósceles mide 80 cm y cada uno de sus lados 100 cm. ¿Cuánto miden los ángulos que son iguales?

2. Determina el lado de un pentágono regular inscrito en una circunferencia de radio 8 cm. ¿Cuánto mide la apotema del pentágono?, ¿cuál es su área?



Manejo de la información

Proporcionalidad y funciones

Cálculo y análisis de la razón de cambio de un proceso o fenómeno que se modela con una función lineal. Identificación de la relación entre dicha razón y la inclinación o pendiente de la recta que la representa

Reactivando el saber

Realiza la siguiente actividad.

Considera la relación entre dos variables: una longitud en pulgadas y la misma expresada en centímetros.

x (plg)	1	2	4	5	7	12
y (cm)	2.54	5.08	10.16	12.7	17.78	30.48

1 Asumiendo que la variable independiente se coloca en el eje x y la dependiente o función en el eje y, traza una gráfica con estos puntos, conéctalos de manera suave y observa la "curva" que se obtiene (se le llama curva en general, independientemente de la forma que adquiera).

a) ¿Qué forma tiene la curva?

b) ¿Tendría algún sentido extender esta curva más allá de los datos de la tabla? Al hacerlo, ¿pasa la curva por el origen?, ¿qué significado tiene este hecho?

c) ¿Serviría esta curva para obtener equivalencias que no están dadas en la tabla?, ¿por qué?

El concepto *razón de cambio* significa qué tanto aumenta la variable dependiente en la medida que aumenta la variable independiente, y se calcula entre dos puntos dividiendo el incremento de y entre el incremento de x; es decir:

$$\frac{\text{variación de } y}{\text{variación de } x} = \frac{12.7\text{ cm} - 5.08\text{ cm}}{5\text{ plg} - 2\text{ plg}} = 2.54\ \frac{\text{cm}}{\text{plg}}$$

2. Determina razones de cambio entre los distintos puntos medidos tanto en pulgadas como en centímetros, que se proponen y completa la tabla.

Va de ______________	a ______________
Va de ______________	a ______________
La razón de cambio	

a) ¿Cómo explicas los resultados obtenidos en el último renglón?

b) ¿Tiene algún significado especial la razón de cambio calculada?

Bloque 4

Debe ponerse especial cuidado cuando la curva no pasa por el origen, aunque la razón de cambio sigue siendo útil para convertir entre unidades cuyos ceros no coinciden; por ejemplo, cuando se observa la relación entre grados centígrados (°C) y grados Fahrenheit (°F), se sabe que cada 9 °F corresponden a 5 °C, mientras que 0 °C equivalen a 32 °F. Si esto es así, ¿a cuántos °F equivalen 5 °C? Si 21 °C es la temperatura normal del agua, ¿cuál es en °F? Un caballero inglés dice que la temperatura ideal del agua para rasurarse es de 106 °F, ¿cuál es en °C? Al nivel del mar, el agua hierve a 100 °C, ¿a cuántos herviría en °F? Todas estas preguntas podrás responderlas a continuación.

Analiza y resuelve el siguiente problema. Considera la utilidad de representar la información usando tablas o gráficas.

El costo de 3 kg de peras fue de $54, y por 7 kg se pagaron $216. Tomando la cantidad de kilos como variable independiente (x) y el precio como variable dependiente (y):

a) Encuentra la ecuación de la recta que da el precio total por los kilos que se compren.

b) Calcula la razón de cambio, exprésala con unidades $\frac{\$}{\text{kg}}$ y explica su significado.

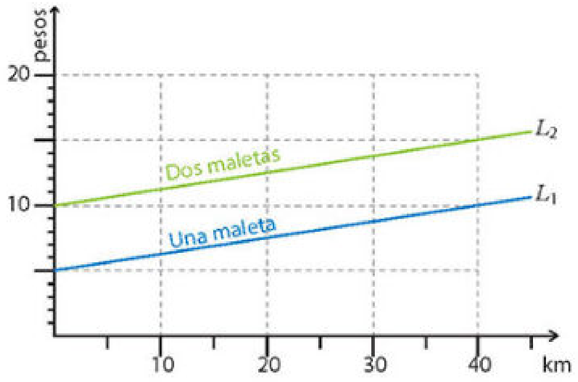
c) ¿Cuánto se pagaría por 12 kg de peras?

d) ¿Cuántos kilos completos de peras podrían comprarse con $80?, ¿cuánto dinero sobraría?

e) ¿La pendiente de la recta tiene alguna relación con la razón de cambio?, ¿cuál?

Comparen sus respuestas con las de algunos de sus compañeros y discutan en torno a las diferencias que encuentren.

A veces es conveniente representar de manera gráfica la relación entre dos variables, pues permite una apreciación visual contundente. Por ejemplo, la siguiente gráfica muestra lo que una empresa de transporte cobra por transportar una o más maletas. La línea azul L_1, representa el precio por el transporte de una maleta, dependiendo de los kilómetros que haya que recorrer; la línea verde L_2, el precio por transportar dos maletas. Podrían trazarse más gráficas similares, para tres o más maletas.



Analicen la gráfica anterior y respondan lo que se solicita.

a) ¿Cuáles son las razones de cambio para L_1 y para L_2?

b) ¿Tiene alguna relación la pregunta anterior con el hecho de que ambas líneas sean paralelas?

c) ¿Qué significado tiene esta razón de cambio?

d) Si la razón de cambio es la misma en ambos casos, ¿por qué es más costoso transportar dos maletas que una en un solo viaje?

e) Escriban la relación entre precio y kilómetros recorridos para L_1 y para L_2.

f) ¿Cuál es la pendiente de cada una de las rectas?

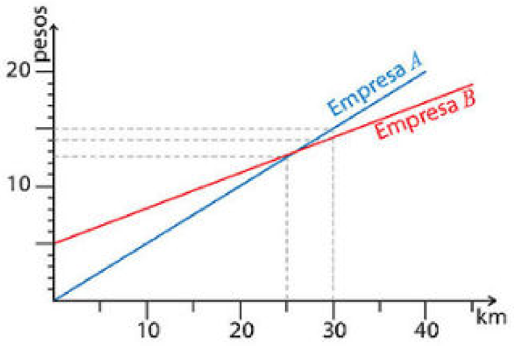
g) ¿Cuánto costaría transportar una maleta en un trayecto de 200 km? ¿Qué precio se pagaría por trasladar dos maletas en el mismo trayecto?

h) ¿Qué es más barato, pagar dos viajes con una maleta cada uno, o pagar un viaje con dos maletas?

Como has podido constatar, la razón de cambio y la pendiente tienen el mismo valor, aunque se trata de dos interpretaciones distintas. Como ya se vio en lecciones anteriores, la pendiente no es más que la tangente trigonométrica del ángulo de inclinación de la recta, en relación con la rama positiva del eje x, mientras que la razón de cambio representa la rapidez con que la variable dependiente (en el último ejemplo, el precio) aumenta o disminuye su valor conforme la variable independiente cambia (en el ejemplo, los kilómetros recorridos). Dicho de otro modo, toda recta por sí misma tiene una pendiente, sin embargo, para hablar de razón de cambio normalmente se piensa en dos variables que se relacionan, por ejemplo, distancia-tiempo (a la razón de cambio se le llama velocidad), estatura-edad (aquí la razón de cambio es la tasa de crecimiento), capital-tiempo en una inversión bancaria (a la razón de cambio se le denomina tasa de interés), etcétera. En todas esas situaciones particulares, matemáticamente hablando, la razón de cambio tiene el mismo valor que la pendiente.

La siguiente gráfica muestra la relación entre lo que se debe pagar por el alquiler de un servicio de transporte de mercancías y la cantidad de kilómetros recorridos.

El dueño de las mercancías tiene ofertas de dos compañías de transporte A y B.



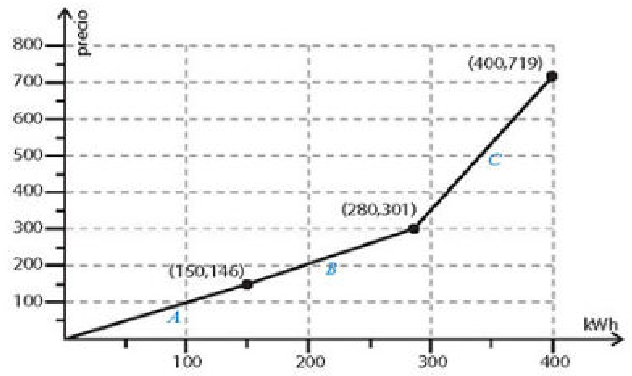
Bloque 4

Analicen la gráfica y respondan las siguientes preguntas.

1. ¿Cuál es la razón de cambio de la empresa A?, ¿cuál la de la B?
2. ¿Cuál de las empresas cobra más barato si se recorren 15 km?, ¿cuál si se recorren 40 km?
3. ¿En qué caso ambas empresas cobran lo mismo?
4. ¿Cuál es la pendiente para la recta A?, ¿cuál para la B?, ¿qué significado tienen estas pendientes?
5. ¿Cuánto cobra la empresa A por kilómetro recorrido?, ¿cuánto la B, sin tomar en cuenta la tarifa inicial?
6. ¿Cuál es la tarifa inicial de la empresa A, es decir, aunque no recorra distancia alguna?, ¿cuál es la de la empresa B?
7. ¿Cuál empresa conviene contratar para distancias grandes?
8. ¿Por qué si la empresa B tiene una tarifa inicial que no cobra la empresa A, resulta más barata para distancias grandes?
9. ¿Cuál es la ecuación de la recta A?, ¿cuál la de la recta B?

Hay casos en los que la pendiente puede cambiar por tramos, como ocurre en el siguiente ejemplo.

a) La Comisión Federal de Electricidad maneja tres tarifas: A, B y C, para el cobro bimestral de luz por uso doméstico. Las tarifas aplicadas dependen de la cantidad de kWh (kilowatts hora) consumidos en un bimestre, de acuerdo con lo que se muestra en la gráfica.



Usa los datos de la gráfica para calcular lo siguiente.

a) La razón de cambio de la tarifa A, de la B y de la C.

b) ¿Cuánto cuesta cada kWh en cada intervalo, entre 0 y 150, entre 150 y 280, y después de 280?

c) Si un usuario consume 300 kWh en un bimestre, y pagará los primeros 150 kWh a la tarifa A, los siguientes 130 a la B y los restantes 20 kWh a la tarifa C.

- ¿Cuánto pagará este usuario por los 300 kWh consumidos?

La razón de cambio entre el eje de las ordenadas y el de las abscisas se conoce como la pendiente de una recta. En la expresión algebraica de la recta $y = mx + b$, es el valor de m.

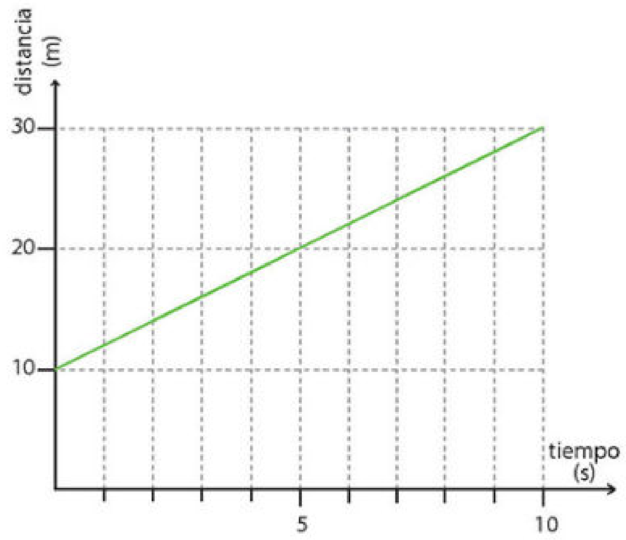
Analiza y resuelve los siguientes problemas:

1. Se ha observado que una planta joven crece a razón constante conforme transcurre el tiempo. Cuando empezó a observarse su desarrollo medía 2 cm, y en la primera semana alcanzó 2.5 cm. Traza una gráfica que explique el crecimiento de la planta y a partir de ésta deduce una relación algebraica.

2. Por el alquiler de un coche se cobran \$100 diarios más \$0.30 por kilómetro recorrido. Representa en forma gráfica esta relación y encuentra la ecuación correspondiente. Si en un día se recorrieron 300 km, ¿cuánto se debe pagar por el alquiler?

3. Un determinado día Alberto compró 15 dólares y pagó por ellos \$184.50. Ese mismo día Ana pagó \$86.10 por siete dólares. Encuentra la ecuación que te permita calcular el precio de x dólares y represéntala gráficamente. ¿Cuánto costarían 12 dólares?, ¿cuál es la razón de cambio entre estas dos variables y qué significa?

4. La siguiente gráfica muestra, conforme transcurre el tiempo, las distancias recorridas por Pepe en su bicicleta.



a) ¿Cómo te darías cuenta si la velocidad a la que Pepe iba era constante?, ¿cuál era esa velocidad?, ¿qué distancia había recorrido cuando se empezó a registrar su movimiento.

b) ¿Qué distancia habría avanzado después de un minuto?, ¿en qué tiempo habría avanzado 50 m? Escribe la ecuación que relaciona distancia y tiempo.

Bloque 4

Análisis y representación de datos

Medición de la dispersión de un conjunto de datos
mediante el promedio de las distancias de cada dato a la media
(desviación media). Análisis de las diferencias de la "desviación media"
con el "rango" como medidas de la dispersión

Reactivando el saber

El juego de futbol

Analiza el siguiente planteamiento y responde lo que se solicita.

El profesor de deportes invitó a sus alumnos de primer grado a formar un equipo que jugará contra los alumnos de tercero. A continuación, se muestran las edades de los integrantes de cada equipo.

- Equipo de primero (E1): 13, 13, 12, 12, 12, 13, 12, 13, 45, 12 y 12
- Equipo de tercero (E3): 16, 15, 14, 14, 14, 16, 15, 15, 16, 15 y 14

Al hacer las listas de edades, el grupo de primero capturó la edad de Francisco como 45 años en lugar de 15 años, ¿cuál es el promedio de las edades del equipo de primero como aparecen en la lista? ¿Cuál es el del grupo de tercero? Justifica tus respuestas.

Al comparar los promedios de los grupos, ¿se puede afirmar que los integrantes del equipo de primero son mayores que los del equipo de tercero?

¿Qué es lo que afecta el resultado en el promedio de las edades del grupo de primero? Reúnete con un compañero y discutan sus respuestas.

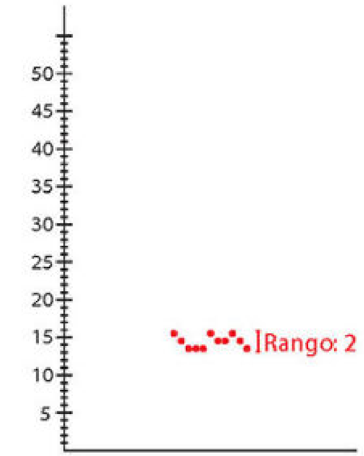
Valores máximo y mínimo de un conjunto

En un conjunto de datos puede ser importante localizar el valor máximo (*máx*) y el valor mínimo (*mín*); éstos son los primeros elementos para estudiar la dispersión de un conjunto, que es precisamente la medida de qué tan alejados están los datos con respecto al promedio.

Compara los rangos de las edades.

1. El rango es la distancia entre el dato menor y el dato mayor de un conjunto.
   a) ¿Cuál es la menor edad en el equipo de tercero? E_{3min} =
   b) ¿Cuál es la mayor edad en el equipo de tercero? E_{3max} =
   c) ¿Cuál es el rango de las edades en el equipo de tercero? $E_{3max} - E_{3min}$ =

2. Observa el gráfico que muestra las edades de los integrantes del equipo de tercero formando una nube de datos y su rango.



   a) Localiza en el mismo gráfico las edades del equipo de primero; calcula y traza su rango.
3. El rango es una medida de dispersión de los datos y nos dice qué tan cercanos o alejados se encuentran unos de otros.
   a) ¿Cómo son los rangos en cada uno de los equipos?
   b) ¿Qué ocurre con los datos en el equipo de primero?
   c) ¿Qué relación tiene el tamaño del rango con la representatividad del promedio respecto a cada uno de los datos?

Cuando el rango es pequeño en relación con el promedio, los datos están muy cerca de este último, el cual los "representa bien". Cuando el rango es muy grande respecto al promedio, las cifras pueden estar muy alejadas de éste, por lo cual "no representa bien" a todos los valores; es decir, entre el promedio y alguno de los datos puede haber una gran distancia.

Por ejemplo, si el promedio de un *conjunto 1* de datos es 10 y el rango es 30, eso quiere decir que alguno de éstos puede estar alejado del promedio hasta en 30 unidades (podría ser cercano a 40); por lo tanto, dicho valor (supongamos 39) estaría muy alejado del promedio. Por otro lado, en el *conjunto 2* de datos con promedio 10 y rango 0.5, el más lejano (digamos 9.6) estaría cerca del promedio y, en consecuencia, también lo estarían todos los demás.

Una manera de comparar el rango con el promedio es simplemente realizar el Coeficiente de Variación respecto al rango: $CV = \frac{rango}{promedio}$. Este valor nos dice qué tan grande es el rango respecto al promedio.

En nuestros ejemplos, el conjunto 1 tiene $CV = \frac{rango}{promedio} = \frac{30}{10} = 3$, lo cual significa que el rango es demasiado grande respecto al promedio y los datos se encuentran muy dispersos; dicho de otro modo, el promedio no es buen representante de algunos de ellos.

El *conjunto 2* tiene $CV = \frac{rango}{promedio} = \frac{0.5}{10} = 0.05$, lo que implica que el rango es pequeño respecto al promedio y los datos se encuentran cercanos unos de otros; es decir, el promedio es buen representante de todos los valores.

Bloque 4

Calcula el Coeficiente de Variación respecto al rango para los conjuntos de edades de cada uno de los equipos de futbol. Tomando en cuenta esas cifras, explica por qué es errónea la siguiente afirmación: "basándonos en los promedios, podemos concluir que los jugadores del equipo de primero son mayores que los del equipo de tercero".

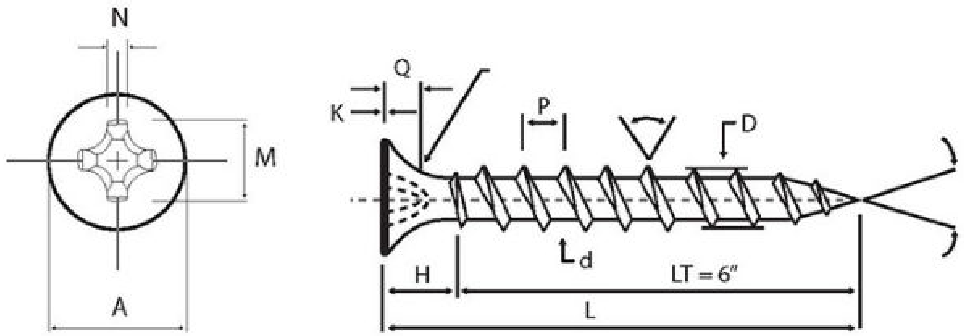
Calculen el rango en los siguientes conjuntos de valores.

a) 4, 1, 6, 2, 8, 3, 9, 12
b) 3, 3, 9, 3, 3
c) 1.1, 1.2, 2.5, 5.4, 5.5
d) 1, 5, 5, 5, 6, 6, 6, 6, 6, 9
e) 4.8, 6.1, 5, 6, 5.6, 5.5
f) Encuentren dos conjuntos con el mismo promedio.
- ¿En cuál de ellos es más probable obtener al azar un valor cercano al promedio?
- ¿En cuál es probable obtener un valor muy lejano al promedio?
- Expliquen sus respuestas.

La fábrica de tornillos

Don Héctor trabaja como inspector de calidad en una fábrica de tornillos. El dueño de la empresa le ha pedido revisar dos procedimientos distintos en la elaboración de tornillos de 6 plg de longitud; cada uno de los métodos genera un pequeño margen de error en las medidas de las piezas. Don Héctor toma una muestra de 1 000 tornillos en cada técnica y les hace mediciones.

- En la muestra del procedimiento A se obtiene una longitud promedio de 6.002 plg de longitud con un rango de 0.15 plg.
- En la muestra del procedimiento B resulta una longitud promedio de 6.01 plg de longitud con un rango de 0.02 plg.



Explora

Para reforzar tus aprendizajes accede al siguiente sitio electrónico:
http://www.extremate.es/ESO/Definitivo%20Funciones/textolineal.swf
(Consulta: 13 de enero 2015).

Analiza y resuelve los siguientes problemas.

1. Si el dueño de la fábrica quiere seleccionar un procedimiento que garantice que todos los tornillos midan entre 5.95 y 6.05 plg. ¿Cuál de los métodos debe elegir?
   a) El asistente de don Héctor propone escoger el procedimiento A, pues el promedio es más cercano a 6 plg. ¿Consideras que su sugerencia es adecuada para lo que la empresa necesita? Explica por qué.
   b) ¿De qué longitud podría obtenerse el tornillo más corto con el procedimiento A? ¿Y el más largo?
   c) ¿De qué longitud podría resultar el tornillo más corto con el procedimiento B? ¿Y el más largo?
2. Si tú fueras el asistente de don Héctor ¿qué sugerirías? Argumenta tu respuesta.

El *rango* o *recorrido estadístico* es la diferencia entre el valor máximo y el valor mínimo en un conjunto de datos.

El rango es un indicador de variación que resulta muy útil; su desventaja es que sólo toma en cuenta dos valores: el máximo (*máx*) y el mínimo (*mín*) de todo el conjunto, y olvida los datos que están entre ellos.

Un mejor indicador de la variación es la desviación media que estudiarás a continuación.

Un experimento sobre la memoria

En una clase de psicología, el profesor Javier organiza a los alumnos para hacer un experimento. A 15 de ellos les entrega una lista con 100 palabras y les da 5 minutos para memorizarlas. Al terminar el tiempo, los estudiantes tienen un minuto para escribir las palabras que recuerdan y se cuentan todas aquellas que son correctas.

Los resultados son:

8, 29, 26, 7, 16, 16, 22, 51, 21, 15, 6, 17, 19, 25 y 55

El profesor explica que para medir la dispersión del conjunto utilizarán una medida conocida como *desviación media*. Ésta se obtiene de la siguiente manera:

- Se calcula el promedio
- Se determina la distancia de cada dato con el promedio, en valor absoluto

Si el promedio es 22.2 entonces:

$$d_1 = |8 - 22.2| = 14.2,\ d_2 = |29 - 22.2| = 6.8,\ d_3 = |26 - 22.2| = 3.8, \ldots$$

- Se calcula el promedio de todas las distancias

A este último se le denomina *desviación media* (DM).

Bloque 4

Con base en los datos de la situación anterior calcula:

a) Los valores extremos del conjunto *máx, mín*

b) El rango

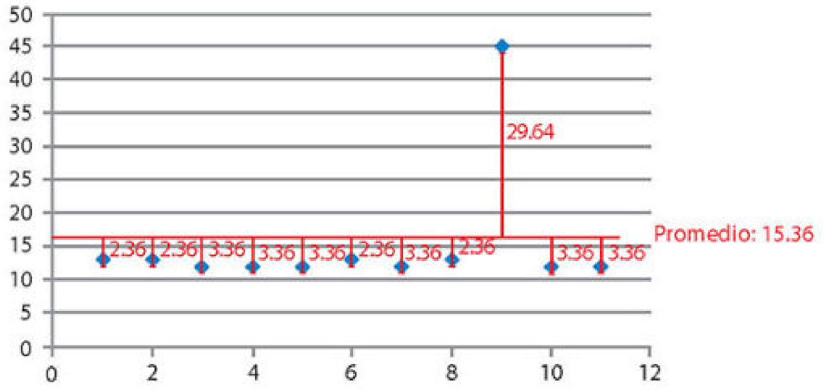
c) La desviación media

Con ayuda de tu profesor, realicen el experimento del ejemplo.

Para ello elijan a 15 personas que memorizarán las palabras. Los demás crearán una lista de 100 palabras, repartidas entre quienes no memorizarán la lista. Cada alumno escribirá las que le correspondan, cuidando que no sean similares (por ejemplo, mesa, silla, banco; Sol, Luna, noche; risa, brisa, prisa, etcétera). Una vez hecho el listado, el profesor lo revisará verificando que no haya repeticiones y se harán 15 copias iguales. Los alumnos que memorizarán recibirán una copia que podrán estudiar durante 5 minutos. Al terminar tendrán un minuto para escribir todas las que recuerden. Se calificarán los reportes contando todos los aciertos. Entonces se elaborará una lista de datos como la del profesor Javier.

1. Determinen…
   a) Los valores extremos del conjunto *máx, mín*
   b) El rango
   c) El promedio
   d) La desviación media
2. Comparen los resultados de tu grupo con los del grupo del profesor Javier.
3. Discutan en cuál de los grupos los alumnos han memorizado mejor. Tomen en cuenta que el promedio no es suficiente para decidir.
4. Escriban una conclusión grupal al respecto.

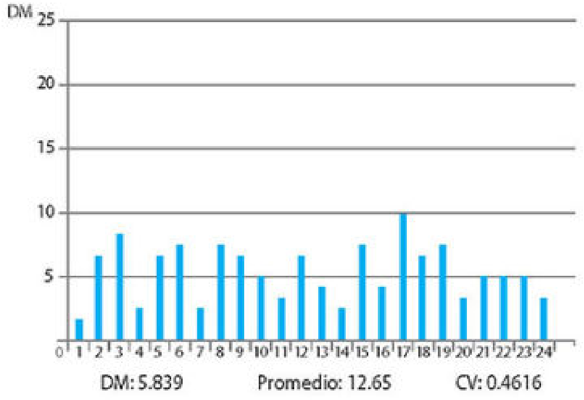
La *desviación media* de un conjunto de datos es el promedio de los valores absolutos de las distancias entre el promedio y cada uno de los datos.



$$DM = \frac{2.36 + 2.36 + 3.36 + 3.36 + 3.36 + 2.36 + 3.36 + 2.36 + 29.64 + 3.36 + 3.36}{11} = 5.39$$

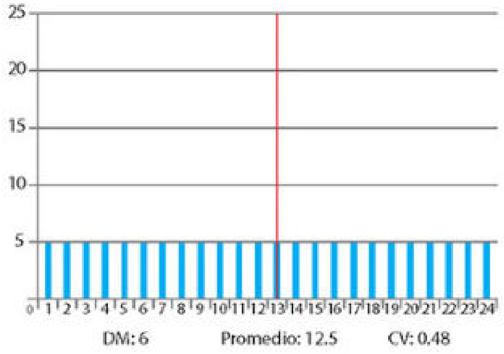
Medidas de dispersión y gráficas de frecuencias

Analizar la dispersión de un conjunto de datos puede resultar muy revelador. Observa la gráfica de la derecha.



En ella se muestra una colección de 120 números aleatorios, entre 1 y 24, agrupados en frecuencias; es decir, se contó el número de veces que se ha obtenido cada resultado. Lo primero que deberás notar es que al agrupar en frecuencias, algunos números ocurren más veces que otros. Esto es normal, ya que 120 es una muestra pequeña. El promedio es cercano a 12.5, que se encuentra a medio camino entre *mín* y *máx*, los valores extremos del conjunto, y la desviación media se aproxima a 6. Si calculamos el *Coeficiente de Variación* respecto a la desviación media, tenemos:

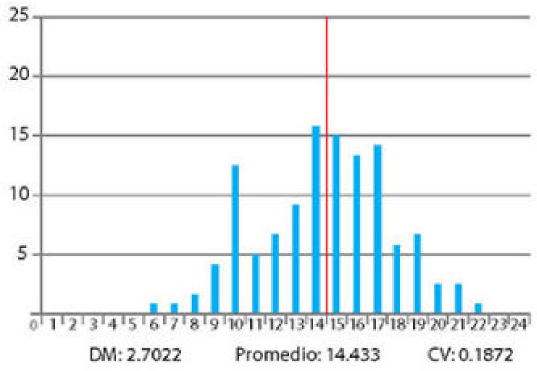
$$CV = \frac{DM}{\text{promedio}}$$



Obtenemos un valor entre 0 y 1, donde 0 significa "ninguna variación" y un valor cercano a 1 significa "muchísima variación". Nota que cuando los números son aleatorios, como en la figura anterior, este coeficiente es próximo a 0.5.

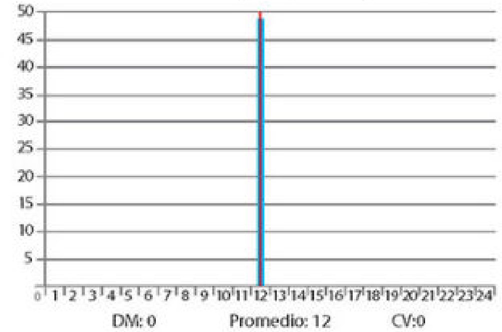
En la gráfica de la izquierda se tiene una muestra de números perfectamente repartidos, de tal manera que el CV, respecto a la desviación media, es también cercano a 0.5.

En la gráfica de la derecha los valores se han obtenido sumando los resultados de cuatro dados, de tal manera que las frecuencias están sesgadas hacia el centro. En este caso, tanto la desviación media como el CV respecto a ésta son más pequeños que en los ejemplos anteriores.

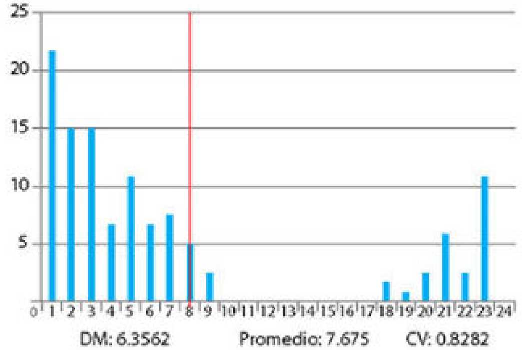


Bloque 4

En la siguiente gráfica, todos los valores miden 12. Representa el caso extremo de la gráfica, donde el sesgo es tan grande que la desviación media y el CV respecto a ésta son 0.



Finalmente, esta última gráfica muestra valores con sesgo hacia los extremos. Notarás que la desviación media crece y el CV respecto a ésta se acerca al 1.



No es lo mismo elegir números "a voluntad" que "al azar"

Realicen la siguiente actividad.

¿Alguna vez te han pedido que digas un número "al azar"? Mucha gente piensa que decir "el primer número que se te ocurra" equivale a elegir un número al azar.

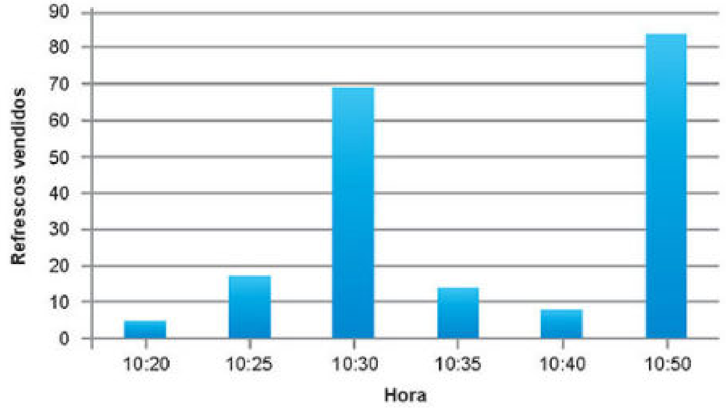
1. En el siguiente experimento, tú y tus compañeros dirán 120 números entre 1 y 24; después usarán el CV respecto a la desviación media para verificar qué tan "al azar" fue la elección de estos números.
   a) Cada estudiante elija un número entre 1 y 24, intentando que la elección sea "al azar".
      - Registren cada valor en el pizarrón y repitan el procedimiento hasta haber obtenido 120 valores.
      - Cuenten cuántas veces ha aparecido cada uno de los valores y hagan un histograma de frecuencias como los de las cinco graficas anteriores.
      - Calculen y registren los indicadores: promedio, desviación media y CV respecto a ésta.
      - Verifiquen el valor del CV respecto a la desviación media; mientras más cercano sea a 0.5, la muestra es más "al azar"; si es menor, tiene un sesgo hacia el centro, y si es mayor tiene un sesgo hacia los extremos.
      - ¿Qué tan "al azar" fueron los números elegidos en tu grupo? Escriban en un esquema las diferencias y semejanzas de las dos "medidas de dispersión" que estudiaron en esta sesión.

Evaluación tipo PISA

Lee, analiza la información presentada y resuelve las siguientes situaciones problemáticas.

Los alumnos de 1° decidieron realizar una investigación relacionada con la cantidad de refrescos que se venden en la cooperativa escolar durante el receso. Para esto, su profesor les dio una gráfica con la información que tienen los responsables de la venta.

Analiza la gráfica e interpreta lo que ocurre en esa escuela.



1. ¿En cuál hora la venta de refrescos en la cooperativa es de 17?
a) = 10:25
b) = 10:30
c) = 10:35
d) = 10:45

2. ¿Cuál es la media de refrescos vendidos en el recreo?
a) 30.83
b) 32.83
c) 69.41
d) 84.12

3. ¿Cuál se puede decir que es la hora de moda para comprar refrescos?
a) 10:20
b) 10:30
c) 10:40
d) 10:50

4. ¿Cuántos refrescos se venden durante el recreo?
a) 84
b) 97
c) 184
d) 197

Con este código, completa tus conocimientos sobre expresiones cuadráticas que determinan el enésimo término de una sucesión.

Bloque 4

Competencias que se favorecen

- Resolver problemas de manera autónoma
- Comunicar información matemática
- Validar procedimientos y resultados
- Manejar técnicas eficientemente

Aprendizajes esperados

- Resuelve y plantea problemas que involucran ecuaciones lineales, sistemas de ecuaciones y ecuaciones de segundo grado.
- Resuelve problemas que implican calcular el volumen de cilindros y conos o cualquiera de las variables que intervienen en las fórmulas que se utilicen. Anticipa cómo cambia el volumen al aumentar o disminuir alguna de las dimensiones.
- Lee y representa, gráfica y algebraicamente, relaciones lineales y cuadráticas.
- Resuelve problemas que implican calcular la probabilidad de eventos complementarios, mutuamente excluyentes e independientes.

Patrones y ecuaciones

Resolución de problemas que implican el uso
de ecuaciones lineales, cuadráticas o sistemas de ecuaciones.
Formulación de problemas a partir de una ecuación dada

Reactivando el saber

Analiza y responde lo que se solicita.

Imagina que tu calificación final en alguna materia se calcula promediando tus notas bimestrales y que te has propuesto alcanzar un promedio de 8, pero hasta el cuarto bimestre éstas eran 7.5, 8.2, 7.0 y 7.2. ¿Qué calificación deberías obtener en el quinto bimestre para lograr tu objetivo?

Problemas como éste pueden resolverse con la ayuda de las matemáticas, planteando y resolviendo una ecuación, pero para ello, primero es necesario definir una o más variables, también conocidas como incógnitas.

Analiza cada una de las problemáticas que se presentan a continuación y realiza lo que se solicita.

1. Para encontrar la calificación que necesitas para alcanzar un promedio de 8, sigue el procedimiento establecido por las siguientes preguntas.

   a) ¿Cuántas variables tiene el problema planteado?

   b) Dale un nombre a tu variable y colócala en la fórmula con la que calculas un promedio de calificaciones; de esta manera habrás planteado una ecuación cuya solución es la calificación que buscas.

$$\frac{7.5 + 8.2 + 7 + 7.2 + \boxed{}}{5} = 8$$

   c) Simplifica la ecuación y despeja la variable.

   d) Interpreta el resultado. ¿Es la solución que obtuviste, una calificación alcanzable?

2. En la siguiente tabla se consignan las primeras 4 calificaciones de cuatro estudiantes.

Nombre	Bim. 1	Bim. 2	Bim. 3	Bim. 4	x	¿Es posible? Sí/No
José	7.3	7.0	7.8	8.2		
Jaime	8.5	8.0	8.5	7.5		
Francisco	7.8	7.0	7.3	8.0		
Sofía	8.7	6.5	9.0	7.5		

   a) Calcula para cada uno la nota que necesita en el quinto bimestre, ajustada a una cifra decimal, para tener un promedio mínimo de 8.0, después interpreta el resultado.

   b) ¿Cuáles de los estudiantes pueden aprobar con 8.0 de promedio o más?

Comparen sus resultados con los de otros compañeros, si hay diferencias, verifiquen el procedimiento empleado y lleguen a una conclusión.

Analicen el siguiente problema y respondan lo que se solicita.

En un examen de 50 preguntas, por cada acierto se suman 3 puntos; en caso de error o falta de respuesta, se restan 2 puntos. Si un alumno obtuvo 60 puntos, ¿cuántos aciertos y errores tuvo?, ¿cuántas preguntas no respondió?

   a) Establezcan las variables del problema; para ello, escriban un enunciado como el siguiente para cada una: "Sea x la cantidad de…", "Sea y …", etcétera.

   b) Usando las variables que definieron, planteen como ecuación cada uno de los enunciados que se incluyen a continuación.

   - "El examen consta de 50 preguntas".
   - "Las respuestas correctas menos las incorrectas suman 60".

   c) Resuelvan el sistema de ecuaciones.

   d) Verifiquen que ambos enunciados sean congruentes con la solución que encontraron.

   e) Completen el siguiente enunciado:

   - En el examen hubo ________ respuestas correctas y ________ incorrectas.

   f) ¿Qué método utilizaron para resolver el sistema?

Comparen sus respuestas con las de otros equipos y vean qué métodos utilizaron para resolver el problema.

Analiza el siguiente problema y resuélvelo como se indica.

En un hotel hay un total de 100 camas distribuidas en 58 habitaciones. Algunas habitaciones tienen dos camas y otras sólo una. ¿Cuántas habitaciones hay con dos camas y cuántas con una?

1. Define las variables del problema:
   a) ¿Cuántas habitaciones tienen dos camas? ____________
   b) ¿Cuántas habitaciones tienen sólo una cama? ____________
2. Representa como ecuaciones cada uno de los siguientes enunciados:
   a) "El hotel cuenta con 58 habitaciones".
   b) "En el hotel hay un total de 100 camas".
3. Resuelve las ecuaciones y verifica que ambas representen a los enunciados.
4. Completa el siguiente enunciado:

En el hotel hay ____________ habitaciones con dos camas y ____________ con una.

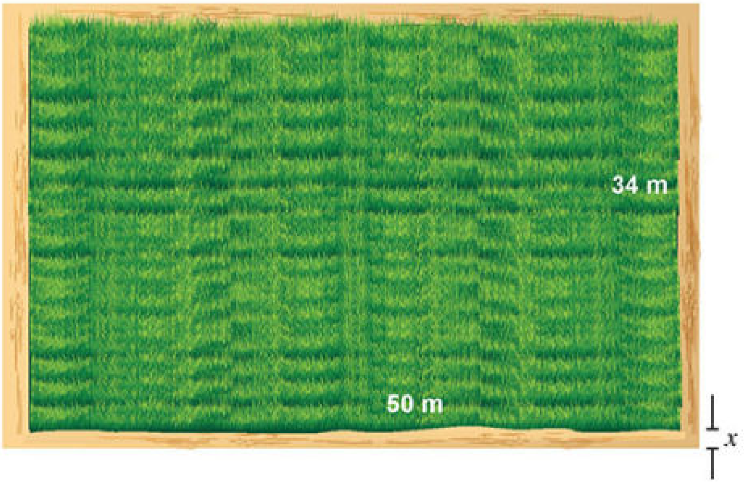
Comparen sus resultados con los de algún compañero para verificar sus respuestas argumentando sus procedimientos.

Analiza y responde lo que se solicita.

Como puedes darte cuenta, las ecuaciones que se plantearon en los problemas anteriores son lineales, pero hay problemas que dan lugar a ecuaciones cuadráticas. ¿Qué métodos utilizarías para resolverlas? Justifica tu respuesta.

Analicen el siguiente problema. Recuerden que el punto de partida siempre consiste en reconocer las variables.

Un jardín rectangular de 50 m por 34 m debe ser rodeado con una franja de arena de ancho uniforme. Si se tiene arena para cubrir 540 m^2, ¿cuál será el ancho de esa franja?



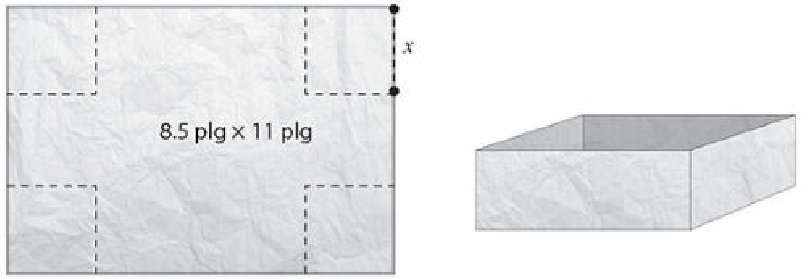
1. Analicen la figura y seccionen la franja en cuatro rectángulos para expresar el área de la franja en términos de la variable.

2. Escriban la ecuación correspondiente a partir del enunciado "El área de la franja equivale a 540 m^2".
3. Resuelvan la ecuación y encuentren la solución al problema. Justifiquen su respuesta.

Algunos problemas dan lugar a ecuaciones más avanzadas que las ecuaciones lineales o cuadráticas. A continuación se presenta un ejemplo.

Analicen el problema que se incluye a continuación y establezcan un planteamiento que les permita responder las preguntas.

Con una cartulina tamaño carta de 8.5 plg × 11 plg, se desea hacer una caja sin tapa, recortando en cada esquina una pieza cuadrada, como lo sugiere la siguiente imagen.



1. Visualicen la caja terminada, como se muestra a la derecha de la figura; señalen cuáles serían sus dimensiones dependiendo del tamaño del corte: tanto su altura como el largo y ancho de la base.
2. ¿Se pueden hacer cortes cuadrados de 5 plg cada uno? Expliquen por qué.
3. Expresen el volumen de la caja como función de x. Indiquen qué valores puede tomar ésta. ¿Es posible contener un litro o más en la caja terminada? Recuerden que un litro equivale a 1000 cm^3, por tanto, las medidas de la hoja deben convertirse primero a centímetros. Si la ecuación original expresaba las medidas en pulgadas, deben replantearla, o bien, determinar cuántas pulgadas cúbicas tiene un litro.

Escriban la ecuación que les permitirá contestar la pregunta anterior. Si no tienen las herramientas para hacerlo, entonces elaboren una tabla con algunos posibles valores de x y el volumen que les corresponde. Tracen una gráfica y utilícenla para responder, aunque sea de forma aproximada, las siguientes preguntas:

a) ¿Cuál es el volumen máximo que puede lograrse con esta cartulina, siguiendo el diseño de la caja?
b) ¿De qué tamaño se debe hacer el corte para lograr el volumen máximo?
c) ¿Cuál es el volumen mínimo y con qué valor o valores de x se obtiene?
d) ¿Qué sucedería si los cortes fueran curvos en lugar de cuadrados?

Comparen su gráfica y sus respuestas con las de otros equipos. Posteriormente, respondan lo que se solicita.

a) ¿Alguno obtuvo mayor precisión en sus respuestas?

b) ¿De qué manera podrían calcular con más exactitud el tamaño del corte para lograr el máximo volumen?

c) ¿Qué funcionó mejor, trabajar con pulgadas o con centímetros? Justifiquen su respuesta.

Los problemas resueltos con base en ecuaciones, sean lineales, cuadráticas, sistemas de ecuaciones, etcétera, no podrían modelarse sin definir las variables, sin reconocer los datos o las relaciones entre ellos, pues sólo con esta información es viable aplicar fórmulas para representar los distintos enunciados que involucra un planteamiento en ecuaciones cuyas soluciones, interpretadas de manera conveniente, nos dan las respuestas que buscamos.

Veamos el algoritmo de la división. Recuerda que al dividir un entero entre otro, se obtiene un cociente y un residuo; por ejemplo, al dividir 38 entre 7, se obtiene cociente 5 (pues $7 \times 5 = 35$), y un residuo 3 (pues $38 = 35 + 3$). Matemáticamente, esto se conoce como *algoritmo de la división* y se representa como:

$$38 = 5\times7+3$$

En general, se expresa en estos términos cuando se quiere dividir a entre b:

$$a = qb + r$$

dividendo, cociente, divisor, residuo

Usando este modelo, una ecuación como $x = 3y + 5$ podría interpretarse como: "si un número se divide entre otro, se obtiene un cociente 3 y un residuo 5".

Con los mismos números desconocidos, la ecuación $x + y = 21$ podría significar: "El dividendo y el divisor suman 21". Lo cual se expresa de la siguiente manera:

$$x = 3y + 5$$

$$x + y = 21$$

Dicho sistema de ecuaciones equivale a la representación algebraica de los planteamientos: "¿Hay dos enteros que sumen 21, tales que si uno se divide entre el otro, el cociente sea 3 y el residuo 5?, ¿cuáles son esos números?"

Con base en lo explicado, realiza lo que se indica.

1. Determina los enteros que resuelven el sistema anterior o demuestra que no existen.
2. Aplica el mismo razonamiento en el problema que se representa a través del siguiente sistema de ecuaciones:

$$x = 7y + 3$$

$$x + y = 43$$

a) Resuélvelo y escribe el planteamiento correspondiente.

b) Compáralo con el de alguno de tus compañeros. En caso de haber diferencias, busquen la equivalencia entre ellos o el error.

En la siguiente actividad se presentan algunas ecuaciones y enunciados que te permitirán valorar la importancia de asignar un significado adecuado a las variables.

Analicen los problemas de la columna izquierda de la tabla y, para cada uno de ellos, realicen lo que se solicita a continuación.

1. Identifiquen qué ecuación o sistema de ecuaciones le corresponde, colocando en los corchetes la letra de cada enunciado.
2. Una vez que hayan localizado la ecuación o sistema, resuélvanlo.
3. Reconozcan las variables, escriban su descripción y el valor que encontraron al final de cada problema.

Ecuación(es)	para		El problema
$2(x-3) = y - 3$ $x = y - 12$	[ ]	[A]	Las edades de Pedro y Martha suman 12. Dentro de 3 años, Pedro duplicará la edad de Martha. ¿Cuáles son sus edades? $x =$ ______, $y =$ ______
$x(x+1) = 182$ $x + (x+1) = 27$	[ ]	[B]	El producto de dos números naturales consecutivos es 182 y ambos suman 27 ¿Cuáles son esos números? $x =$ ______, $x + 1 =$ ______
$x^2 = 12\pi$	[ ]	[C]	¿Cuánto debe medir el lado de un cuadrado para que su área sea igual a la de un círculo de radio 12? $x =$ ______
$x^2 + x - 182 = 0$	[ ]	[D]	Hace 3 años, María duplicaba la edad de Juan; hoy Juan es 12 años menor que María ¿Qué edades tienen? $x =$ ______, $y =$ ______
$2(x+3) = y + 3$ $x = 12 - y$	[ ]	[E]	¿Cuál es el perímetro de un cuadrado cuya área es igual al área de un círculo de radio 3? $x =$ ______

4. Al terminar comparen sus respuestas con las de otros equipos, observen coincidencias y diferencias, y pónganse de acuerdo para disipar todas las dudas. Consideren que: a una de las ecuaciones le corresponden dos problemas, a otra ninguno, ¿cuáles son?

Bloque 5

Con la finalidad de que visualices cómo se desprende un enunciado a partir de una ecuación y viceversa, analiza el siguiente ejemplo.

Si x es un número natural, la ecuación $x^2 + (x + 1)^2 = 265$ da lugar al planteamiento que se muestra a continuación:

Problema: Encontrar dos números naturales consecutivos cuyos cuadrados sumen 265.

Procedimiento:

$$x^2 + (x + 1)^2 = 265$$
$$x^2 + x^2 + 2x + 1 = 265$$
$$2x^2 + 2x + 1 = 265$$
$$2x^2 + 2x - 264 = 0$$
$$x^2 + x - 132 = 0$$
$$(x + 12)(x - 11) = 0$$
$$x = -12 \text{ o bien } x = 11$$

La solución es 11 porque -12 no es un número natural.

Respuesta: Los números naturales consecutivos cuyos cuadrados suman 265 son: $x = 11$ y $x + 1 = 12$

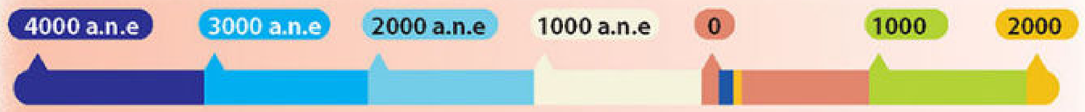
Verificación: $(11)^2 + (12)^2 = 121 + 144 = 265$

Como muestra el ejemplo anterior, de la ecuación se desprende el enunciado de un problema. A su vez, del problema se desprende un procedimiento para resolverlo y al final una respuesta al problema planteado.

En las siguientes expresiones, las variables representan números naturales. Plantea un problema para cada ecuación, desarrolla el procedimiento y resuélvelo como se hizo en el ejemplo anterior.

1. $x(x + 1) = 56$
2. $(x - 1) + x + (x + 1) = 42$
3. $(x + 1)(x + 2) = 64$
4. $(x - 5) = 12$

Matemáticas en el pasado



Un matemático griego de nombre Diofanto, de cuya vida poco se sabe, es considerado el inventor del álgebra. Dejó como legado una importante obra llamada *Arithmetica*, la cual, se cree, constaba de 13 libros, aunque sólo se conocen seis. A él se le atribuye la creación de una colección de problemas en los que las variables corresponderían a números enteros o cocientes de enteros, conocidas como *ecuaciones diofantinas*. En su sepultura, un alumno escribió este epitafio:

"Transeúnte, ésta es la tumba de Diofanto y esta sorprendente distribución te dice el número de años que vivió. Su niñez ocupó la sexta parte de su vida; después durante la doceava parte, su mejilla se cubrió con el primer bozo. Pasó aún una séptima parte de su vida antes de tomar esposa y, cinco años después, tuvo un precioso niño que, una vez alcanzada la mitad de la edad de su padre, pereció de una muerte desgraciada. Su padre tuvo que sobrevivirle, llorándole, durante cuatro años. De todo esto, se deduce su edad".

Fuente: Pérez, Sergio, 2013.

Si deseas profundizar al respecto, te sugerimos consultar *Crónicas algebraicas* de Concepción Ruiz y Sergio de Régules en los libros de la Biblioteca Escolar.

Reúnanse en parejas para que, a partir del texto anterior, estimen a qué edad murió Diofanto.

1. Definan una variable para designar la edad que tenía el matemático al morir.

   Sea __________ = la edad a la que murió Diofanto.

2. Analicen cada uno de los enunciados del epitafio y exprésenlos de manera algebraica, en términos de la variable que establecieron.
   a) Su niñez fue la sexta parte de su vida: __________.
   b) Pasaron luego tantos años como la doceava parte de su existencia: __________.
   c) Luego transcurrió una séptima parte de su vida antes de casarse: __________.
   d) Cinco años después nació su hijo: __________.
   e) Su hijo vivió la mitad de los años que él: __________.
   f) Cuatro años pasaron hasta que murió: __________.

3. Sumen los periodos que identificaron y formulen una ecuación para resolver el planteamiento principal. Simplifiquen y resuelvan la ecuación. ¿Cuántos años vivió Diofanto?

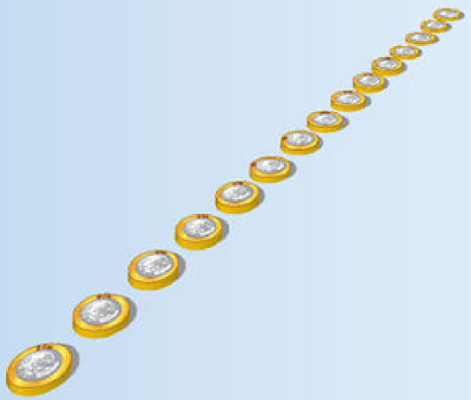
Medida

Análisis de las secciones que se obtienen al realizar cortes a un cilindro o a un cono recto. Cálculo de las medidas de los radios de los círculos que se obtienen al hacer cortes paralelos en un cono recto

Reactivando el saber

Analiza la siguiente situación y responde lo que se solicita.

Imagina que, caminando por la calle, te encuentras un "kilómetro de monedas" al cual contribuyes generosamente colocando 15 monedas. Al hacerlo, observarías algo parecido a lo que se muestra en la ilustración.

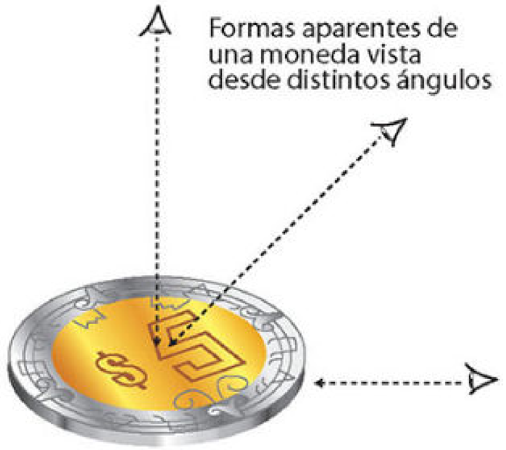


Más adelante, coincides con un amigo y deciden tirar un "volado". Si siguieras la trayectoria de la moneda con la mirada, alcanzarías a percibir algo como lo que aparece en la imagen.

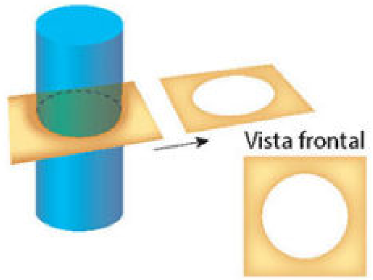
¿Por qué siendo la moneda un círculo, en la trayectoria casi no se aprecia dicha figura? ¿Qué curva forma ese lanzamiento de la moneda?

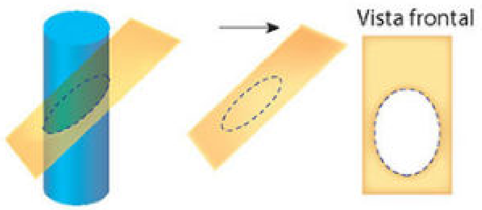
A partir de la situación anterior, contesten las preguntas.

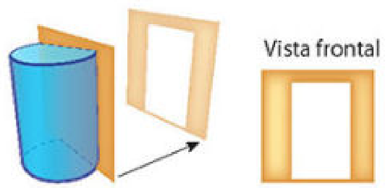
1. ¿Desde qué ángulo se debe observar una moneda para que se aprecie su forma circular?
2. ¿Cuál es la apariencia de la moneda si se mira desde cualquier otro ángulo?
3. ¿Qué forma adquiere si se ve completamente de lado?
4. ¿Cuál es el nombre de la figura que se aprecia desde distintos ángulos? Escríbanlo, de manera individual, sobre la ilustración.



Las figuras anteriores, excepto la parábola, se pueden obtener cortando de diversas formas un cilindro. Las siguientes imágenes corresponden a un cilindro visto en perspectiva y cortado por un plano de diferentes maneras. En cada figura, se presenta el resultado del corte con una vista frontal.







Bloque 5

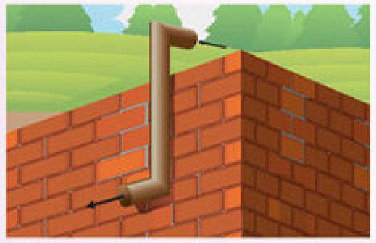
Analicen las figuras donde el cilindro es cortado de diferentes maneras y respondan las preguntas.

1. ¿Cuáles son las figuras geométricas que pueden obtenerse cortando un cilindro con un plano, en diversos ángulos y a distintas profundidades?
2. ¿Se pueden obtener círculos de diferentes diámetros a partir de un mismo cilindro?, ¿cómo?
3. ¿Se pueden obtener elipses con distintas proporciones? ¿De qué depende?
4. ¿Es posible obtener rectángulos con distintas proporciones? ¿De qué depende?
5. ¿Se puede obtener un cuadrado? ¿Bajo qué condición?
6. ¿Cuántos cuadrados se pueden obtener cuando la altura del cilindro es igual al diámetro de la base?
7. ¿Cuántos cuadrados pueden obtenerse cuando la altura del cilindro es menor que el diámetro de la base?
8. ¿Cuántos cuadrados pueden obtenerse cuando la altura del cilindro es mayor que el diámetro de la base?
9. ¿Cómo se conseguiría un segmento de recta?
   a) Con plastilina o barro, pueden modelar un cilindro para practicar distintos cortes o conseguir uno de unicel en la papelería.
   b) Investiguen en qué objetos, herramientas o artículos de uso común es posible visualizar las secciones de un cilindro y hagan una lista para compararla con las de otros equipos.

Construyendo Matemáticas

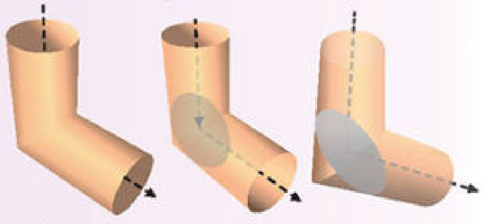
Construye un periscopio

El instrumento que se usa en los submarinos para ver la superficie del mar se llama periscopio. Es factible fabricar uno casero con un tubo largo de cartón, partido en tres tramos, y un par de espejos pequeños. La idea general se muestra en las ilustraciones.



Periscopio de cartón

Se hacen cortes de 45° en el tubo de cartón y en el interior se ajusta un espejo, de la mejor manera posible. ¿Qué ángulo de inclinación consideras que debería tener el espejo?



Vista exterior Vistas transparentes

Reúnete con algunos compañeros para que analicen los detalles y reflexionen sobre estos planteamientos.

a) ¿Qué forma debe tener el espejo?
b) ¿Cuáles serían sus dimensiones?
c) ¿Se podría trazar con base en el tubo cortado?

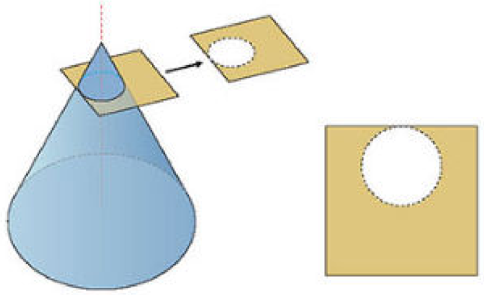
Una vez que tracen el espejo, pidan ayuda a un vidriero para que lo corte según el diseño que hicieron. Unan las cinco partes, los tres tramos de tubo y los dos espejos para terminar el periscopio.

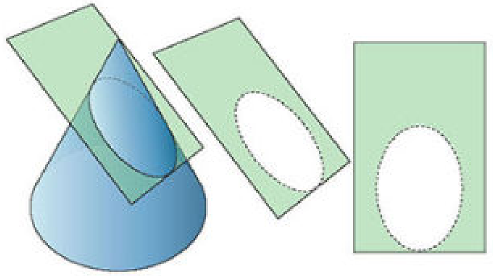
Los cortes de un cilindro con un plano dan lugar a curvas interesantes. Ocurre lo mismo con un cono cuando es dividido a partir de diferentes ángulos de inclinación; las curvas que se obtienen de esa forma reciben el nombre de **secciones cónicas**.

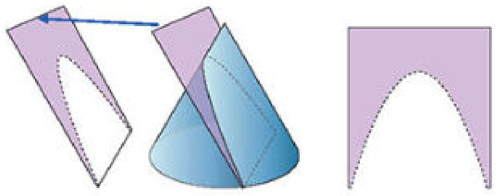
Observa dichas curvas en las siguientes imágenes. En cada una, se incluye la vista frontal.

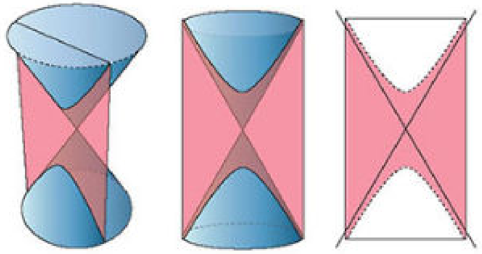
Palabra Mu

secciones cónicas. Familia de curvas entre las que se encuentran: parábolas, órbitas elípticas y trayectorias hiperbólicas.









Si conoces el nombre de las curvas que se obtienen al cortar el cono, anota sus nombres; identifícalas con el color de cada plano.

a) Amarillo ____ b) Verde ____ c) Morado ____ d) Rosa ____

Observa nuevamente las figuras superiores y responde las preguntas.

1. ¿Es posible obtener círculos de diferentes radios cortando un cono?, ¿cómo debe orientarse el plano de corte?, ¿de qué depende el radio del círculo?
2. ¿Se pueden obtener elipses de distintos tamaños cortando un cono?, ¿cómo debe orientarse el plano de corte?, ¿de qué depende el tamaño de las elipses?
3. ¿Es posible obtener elipses con distinta proporción a partir de un mismo cono?, ¿de qué depende?
4. ¿Cómo debe inclinarse el plano de corte para obtener una parábola?, ¿de qué depende el ancho de la parábola?
5. ¿Qué curva se logra cuando el plano de corte tiene un ángulo mayor al de la generatriz del cono y puede llegar a ser una vertical?
6. ¿Qué nombre reciben las generatrices del cono en relación con estas curvas?

Bloque 5

Explora

Accede al siguiente enlace para conocer acerca de algunas secciones cónicas en la naturaleza.
http://www.cepazahar.org/recursos/pluginfile.php/3828/mod_resource/content/0/Proyectos/coni/presencia_de_las_cnicas_en_la_naturaleza_el_arte_y_la_tcnica.html
(Consulta: 13 de septiembre de 2014).

Construyendo Matemáticas

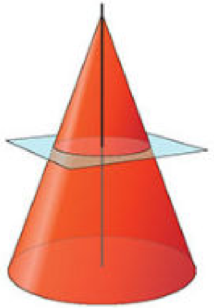
Intenta visualizar las secciones cónicas; para ello, elige alguna de las siguientes propuestas.

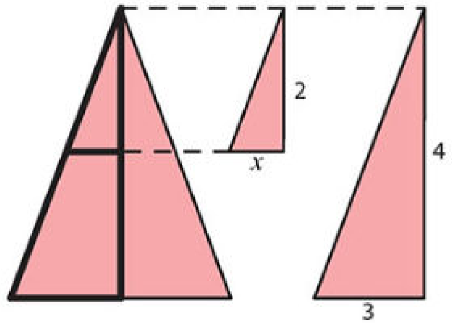
1. Compra en la papelería un cono de unicel o hazlo de plastilina o barro y córtalo de diferentes formas: paralelo a la base, levemente inclinado, como la generatriz del cono; paralelo a la generatriz y más inclinado que ésta, pudiendo llegar a ser vertical, es decir, paralelo al eje de simetría del cono.

2. En la noche, con una lámpara de mesa, de las que tienen pantalla circular, se produce un cono de luz cuyo vértice se encuentra en el filamento del foco y se abre hacia arriba, recortado por la abertura circular de la pantalla; cabe mencionar que dicha abertura representa en sí misma una de las secciones cónicas. Orienta la lámpara en distintas direcciones en relación con la pared y observa la forma de las curvas que se dibujan con la luz, horizontal y transversal al muro, para obtener círculos; luego, un poco inclinada, para formar elipses; después, procura que la generatriz del cono sea paralela al muro, así podrás ver una parábola, y cuando la lámpara esté en posición vertical, paralela al muro, se dibujará en la pared una hipérbola.

Analiza la siguiente figura, después responde y realiza lo que se solicita.

En la figura un cono es cortado exactamente a la mitad con un plano paralelo a su base, formando un círculo en ésta, ¿cuál crees que sea la medida del radio? A la derecha del cono, aparece la misma figura vista de perfil, redacta un método para calcular el radio.





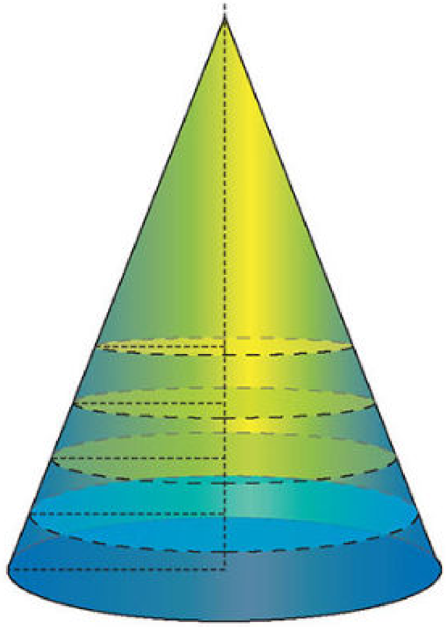
Responde lo que se solicita.

En la actividad anterior, pudiste notar que, con el corte, se crea un nuevo cono, cuya altura es la mitad de la altura original. En la vista de perfil, se puede apreciar que cada cono corresponde a un triángulo rectángulo, en donde el radio de la base es un cateto, la altura otro cateto y la generatriz es la hipotenusa.

a) ¿Qué ocurre con el radio de la base cuando la altura se reduce a la mitad?

b) ¿Qué método usarías para encontrar el cateto desconocido?

c) El cono de la figura que se muestra a continuación tiene una altura de 10 cm y un radio en la base de 2 cm. Si se hacen cortes con un plano paralelo a la base a cada centímetro de altura, ¿qué radios tendrían las bases de los conos resultantes?



1. Con base en tu respuesta completa la siguiente tabla.

h	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
r	0										

a) Traza en tu cuaderno una gráfica en la que relaciones las alturas con los radios de las bases.

b) Completa el siguiente texto.

Cuando un cono circular recto se corta con planos paralelos a la base, se obtienen conos cuyas bases tienen una relación de tipo ______________; es decir, cuando la altura de una se duplica, el radio de la otra se ______________. Dicho en otras palabras, como el ángulo entre el eje de simetría y la generatriz es el mismo para todos los conos que se obtienen, la relación $\frac{r}{h}$, también conocida como tangente trigonométrica del ángulo, permanece ______________.

Construcción de las fórmulas para calcular el volumen de cilindros y conos, tomando como referencia las fórmulas de prismas y pirámides

Reactivando el saber

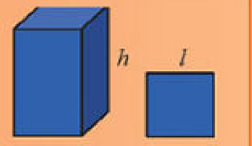
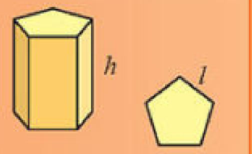
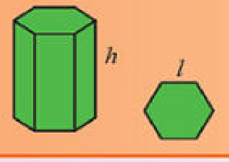
Realicen lo que se solicita a continuación.

Un prisma contiene el volumen de tres pirámides cuya base y altura son semejantes a las del prisma. ¿Recuerdas cómo se calcula el volumen de prismas y pirámides? Recupera esos conocimientos comentando con uno de tus compañeros cómo podrían hacerlo.

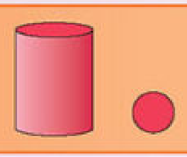
Construyendo Matemáticas

Realicen la siguiente actividad.

Construyan y calculen el volumen de cada uno de los prismas de la siguiente tabla; consideren que todos tienen altura (h) y una base regular de lado (l), ambas dadas en centímetros. Usando arena o arroz, comparen el volumen de estos prismas con el de una cajita de cartón de 4 cm × 5 cm × 5 cm cuyo volumen es de 100 cm^3.

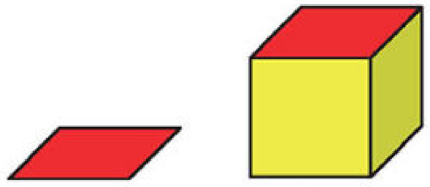
Nombre	Figura	Área de la base	Volumen
Prisma cuadrangular h = 10 cm, l = 3.162 cm			
Prisma pentagonal h = 10 cm, l = 2.411 cm			
Prisma hexagonal h = 10 cm, l =1.962 cm			

Construyan y calculen el volumen del cilindro. Utilicen arroz para compararlo con el de su caja medidora.

Cilindro h = 10 cm, r = 1.784 cm			

Observa las siguientes imágenes y responde las preguntas.

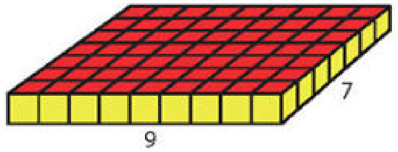
1. ¿Cuál es el volumen del cubo cuyo lado mide 1 mm?
2. ¿Cuál es el área de su base?
3. ¿Cuál es la diferencia entre la medida de su volumen y la de su área?
4. ¿Puede coincidir el número del volumen de un prisma con el de su superficie?
5. Con base en los cálculos realizados, completa la siguiente información.



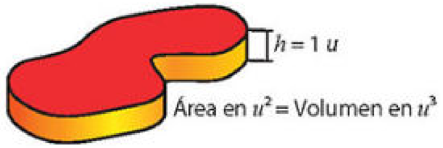
1 mm^2 1 mm^3

a) Una placa rectangular formada por 7 filas y 9 columnas de cubos unitarios, tiene un volumen de __________.

b) Por otro lado, la tapa de esa placa consta de ____ × ____ = _______ = mm^2



En general, cualquier prisma de altura 1, sin importar la forma de su base cumple con:



La cualidad esencial de un prisma es que puede verse como la traza que deja una figura plana al ser trasladada sobre un eje perpendicular a ella, desde su base hasta su tapa.

Escribe la fórmula para calcular el volumen de un cilindro.

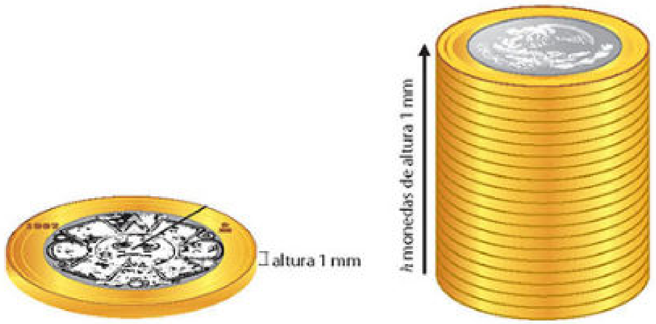
____

Así como se puede extender el concepto de polígono regular hacia el círculo, al cual se le considera un polígono regular con un número infinito de lados, los cilindros y conos pueden ser definidos como una extensión de prismas y pirámides cuyas bases, polígonos regulares, se aproximan a círculos cuando tienen un número indeterminado de lados.

Este proceso de aumentar la cantidad de lados para irse aproximando a un círculo, que se considera con una cantidad infinita de éstos, es una abstracción de la mente humana que ha sido útil a lo largo de la historia para extender conceptos básicos o tangibles y llegar a conclusiones que rebasan lo que percibimos como "realidad".

Analiza la situación y responde lo que se solicita.

Imagina que tienes una cantidad h de monedas circulares de radio r y que la altura de cada una mide 1 mm.



a) Si el radio de cada moneda es r mm, ¿cuál sería el área de una cara de la moneda?

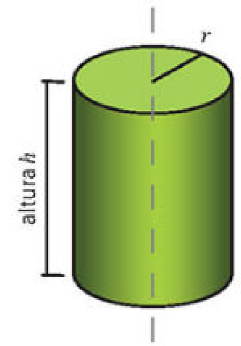
b) ¿Cuál sería el volumen de la pila de h monedas?

c) ¿Qué figura forma la pila de monedas y cuáles son sus dimensiones?

Analicen la siguiente información y respondan lo que se solicita.

La fórmula que se usa para obtener el volumen de un cilindro es esencialmente la misma que la del volumen del prisma; es decir, multiplicar el área de la base por la altura. La diferencia radica en la forma en que se calcula el área de la base, puesto que para el cilindro ésta es un círculo.

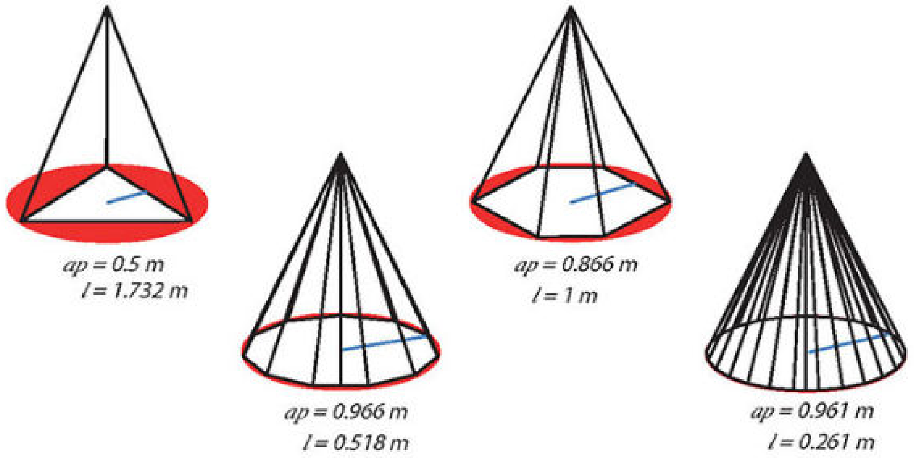
a) Comenten la información del párrafo anterior y señalen cuál es la fórmula para calcular el volumen de un cilindro.



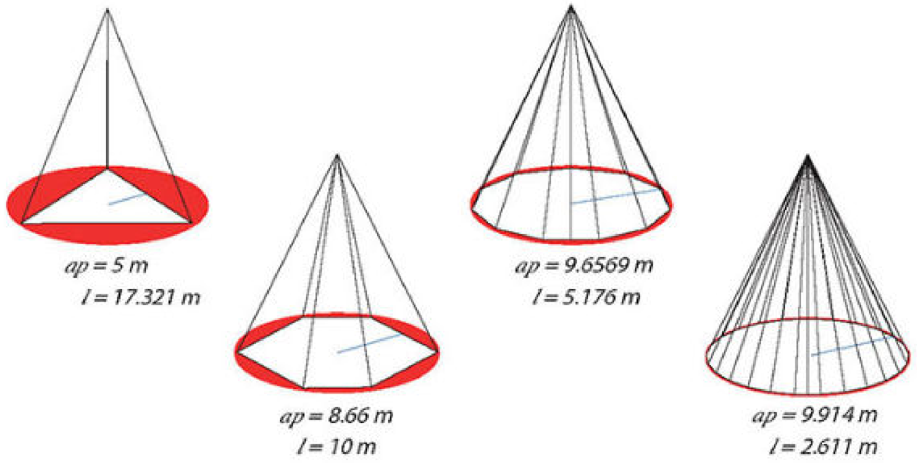
Volumen del cono

¿Cómo se obtiene el volumen de un cono circular recto? Piensa en una serie de pirámides cuyas bases sean polígonos regulares; todas ellas estarían construidas sobre una circunferencia de radio r. Para simplificar la idea podemos tomar $r = 1$ m.

Observa que conforme el número de lados crece, la base se parece cada vez más a la circunferencia y, por tanto, la medida del lado l se hace más pequeña, mientras que la medida de la apotema ap se acerca a 1, que es el radio de la circunferencia.



¿Cuál es la fórmula para calcular el área de una circunferencia? Supón que el radio es $r = 10$ m. Para calcular el área de cada pirámide necesitas los siguientes valores.

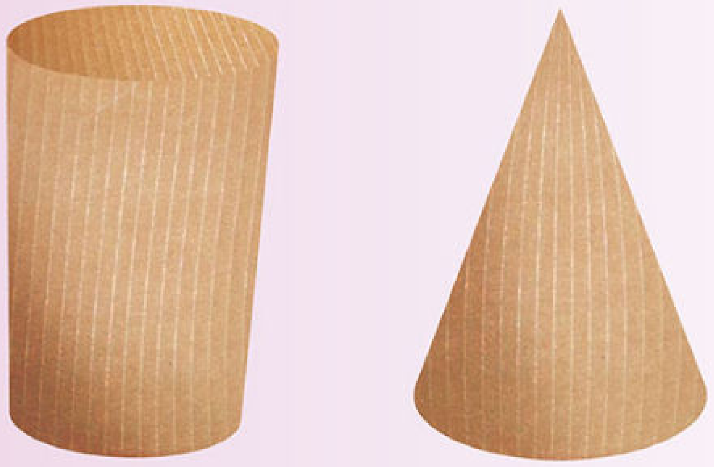


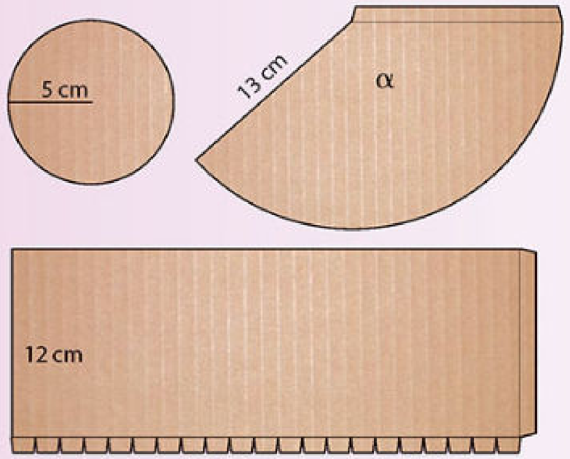
El valor del área se acerca a 100π, es decir $\pi \times 10^2$. Esto es porque el área de la circunferencia es $\pi \times r^2$. Con este proceso, se puede argumentar que un cono se parece mucho a una pirámide y que la relación de éste con un cilindro es similar a la de una pirámide con un prisma.

Construyendo Matemáticas

Realiza lo que se indica y responde las preguntas.

Con un cuarto de cartulina crea un cono y un cilindro abiertos, como los que aparecen en la imagen. Calcula las medidas faltantes.





Llena el cono con arroz y vacíalo dentro del cilindro tantas veces como sea necesario hasta que se llene.

a) ¿Cuántas veces cabe el volumen del cono en el volumen del cilindro?

b) Escribe la fórmula para calcular el volumen de un cono.

Estimación y cálculo del volumen de cilindros y conos o de cualquiera de las variables implicadas en las fórmulas

Reactivando el saber

Lean el siguiente problema y respondan lo que se solicita.

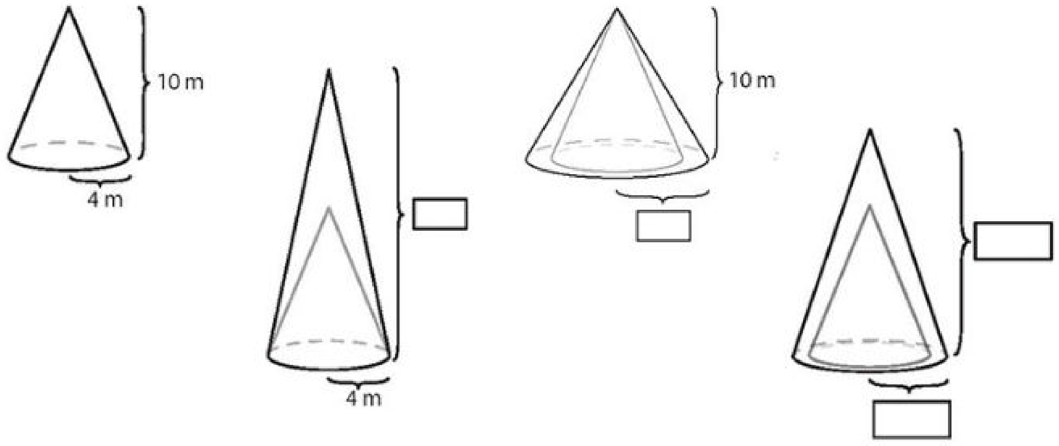
Problemas con cilindros y conos

1. Un silo cónico de 4 m de radio por 10 m de altura puede contener 167.55 m^3 de granos. Se planea construir otro silo cónico que duplique su capacidad de almacenamiento. El constructor ha pensado en tres opciones:
   - Modificar la altura
   - Modificar el radio
   - Modificar ambas medidas de tal modo que no se altere la forma del silo

Comenta con alguno de tus compañeros qué sucedería en los tres casos.

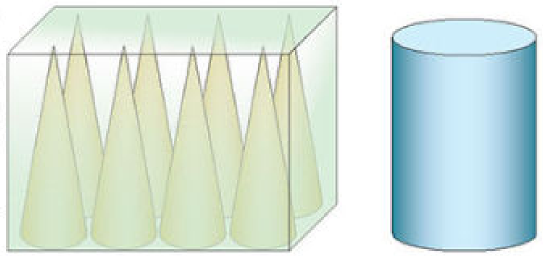
Analiza y resuelve los siguientes problemas.

1. Determina las dimensiones del silo en cada una de las opciones. Verifica que tus respuestas correspondan a silos cónicos cuyo volumen sea el doble del volumen del silo original, para ello, calcula los volúmenes.



Bloque 5

2. Edith quería comprar un bote de helado en forma cilíndrica cuyas medidas eran: 10 cm de diámetro por 12 cm de altura. Su hermana le propuso comprar por el mismo precio 8 conos en envase de papel, de la mitad del diámetro del recipiente cilíndrico y con altura de 15 cm.



¿Cuál de las hermanas ha pensado en la mejor opción para comprar mayor cantidad de helado por menos precio? Justifica tu respuesta.

Recuerden los conceptos de "crecimiento lineal" y "crecimiento cuadrático" revisados en el bloque 3, y con base en ellos realicen lo que se solicita.

1. Identifiquen en las fórmulas para calcular el volumen del cilindro y del cono cómo crece éste en relación con la altura y el radio de la base, y respondan:
   a) ¿Por cuánto se multiplica el volumen de un cilindro si se duplica su altura?
   b) ¿Por cuánto se multiplica el volumen de un cilindro si se duplica su diámetro?
   c) ¿Por cuánto se multiplica el volumen de un cono si se duplica su altura?
   d) ¿Por cuánto se multiplica el volumen de un cono si se duplica su diámetro?
   e) ¿Por cuánto debe multiplicarse la altura de un cono o de un cilindro para duplicar su volumen?
   f) ¿Por cuánto debe multiplicarse el diámetro de un cono o de un cilindro para duplicar su volumen?
2. Si se tiene un cilindro y se quiere construir un cono de la misma base que éste, ¿qué relación deben tener las alturas de ambos cuerpos para que su volumen sea el mismo?
3. Si se tiene un cilindro y se quiere construir un cono con la misma altura que éste, ¿qué relación debe haber entre los radios de las bases de ambos cuerpos para que tengan el mismo volumen?

Cuando se calcula el volumen de un cilindro, se toman en cuenta las variables r (radio de la base) y h (altura del cilindro).

En la fórmula $V = \pi r^2 h$ el radio aparece elevado al cuadrado, por tanto, al modificarlo se afecta cuadráticamente el volumen; reescribamos la fórmula para que quede más claro:

$$V = \pi \cdot r \cdot r \cdot h$$

Así, por ejemplo, cuando el radio se multiplica por un factor k, el volumen se multiplica por k^2, es decir:

$$\pi \cdot kr \cdot kr \cdot h = k \cdot k \cdot \pi \cdot r \cdot r \cdot h = k^2\pi r^2 h = k^2 V$$

Con la altura h del cilindro no ocurre esto, pues al no estar elevada al cuadrado, afecta linealmente al volumen. Si la altura se multiplica por el factor k, el volumen se multiplica también por el factor k, esto es:

$$\pi \cdot r \cdot r \cdot kh = \pi \cdot r \cdot r \cdot k \cdot h = \pi k r^2 h = kV$$

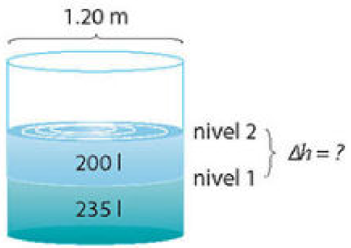
En ocasiones, puede resultar útil considerar al volumen como una variable independiente, de manera que las otras dimensiones estén supeditadas a él. También se pueden hacer consideraciones como: "La altura debe medir el doble que el radio".

Esto te permitirá modificar la fórmula del volumen del cilindro eliminando alguna de las variables; por ejemplo, si la $h = 2r$, entonces $V = \pi r^2(2r) = 2\pi r^3$. Puedes apoyarte en estas ideas para solucionar los siguientes ejercicios.

Analicen y resuelvan los problemas. Tomen en cuenta que 1 l = 1 dm³ = 1000 cm³.

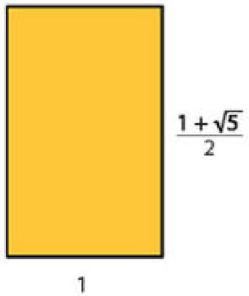
1. Si se desea fabricar una lata de 500 ml cuya altura sea de 13 cm:
   a) ¿Cuál debe ser el diámetro de su base?
   b) ¿Cuántas de esas latas podrán acomodarse en un compartimiento de 35 cm de frente por 8 cm de fondo y 28 cm de altura?

2. En un tanque de agua cilíndrico, cuya base tiene un diámetro de 1.2 m, había 235 l de agua. Si se agregaron al tanque 200 l:
   a) ¿Cuánto aumentó la altura del agua en el tanque?
   b) ¿Cuál fue su altura final?



3. Se quiere formar un cilindro enrollando una lámina rectangular de 1 m × 0.20 m; se deben buscar además dos tapas metálicas circulares para completar la fabricación de un recipiente.
   a) ¿Cuál debe ser el diámetro de esas dos tapas?
   b) ¿Cuál será la altura final del cilindro?
   c) ¿Cuántos litros de agua podría contener ese recipiente completamente lleno?
   d) ¿A qué altura debería llenarse el recipiente para tener 15 l de líquido?

4. Diseñen un bote cilíndrico con capacidad de 1 500 ml con base en la **proporción áurea**, es decir, si r es el radio de la base y h es la altura del cilindro, éstas deben estar relacionadas mediante la **razón dorada**:



5. Un tanque de refrigeración para productos lácteos tiene forma de cilindro con una capacidad de 2 000 l, su radio mide 3 m. Sabiendo que 1 l equivale a 1 dm³, ¿cuál es la longitud del tanque?

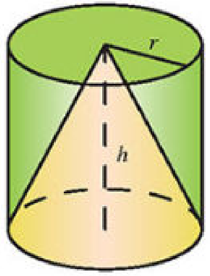
Palabra Mu

proporción áurea. Relación utilizada en el arte para dar el equilibrio que se observa en la naturaleza.

razón dorada. Número irracional φ (phi) que permite aplicar la proporción áurea: $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

6. Para abastecer de agua a una unidad habitacional, un ingeniero planea construir una torre en forma de cilindro de 20 m de altura, con un radio interior de 1.3 m y un radio exterior de 1.8 m.
   a) ¿Cuántos litros podrá contener el tanque como máximo?
   b) ¿Cuántos metros cúbicos de concreto harán falta para construir la pared de la torre?
   c) Si además se quieren colocar dos bases con forma circular, del mismo espesor que la pared, ¿cuánto concreto adicional hará falta?

7. Un rollo de papel higiénico de la marca A tiene un diámetro exterior de 12 cm, un diámetro interior de 4.5 cm y una altura de 10 cm. Un rollo de la marca B tiene el mismo diámetro interior y la misma altura, pero su diámetro exterior es de 11 cm.
   a) Ambos rollos son de papel del mismo grosor, pero el de la marca A tiene 500 hojas. ¿De cuántas hojas será el de la marca B?
   b) Si el rollo de la marca A cuesta \$4.00 y el de la marca B \$3.50, ¿cuál es el que más conviene comprar? Justifiquen su respuesta.



8. Se ha insertado un cono dentro de un cilindro. Los dos cuerpos tienen una altura de 12 cm y una base de 5 cm de radio. ¿Cuánta agua cabe en el espacio libre que queda entre ellos?
9. Un vaso desechable tiene forma de cono truncado; los diámetros de la base y la boca son 48 y 75 mm, respectivamente, y la profundidad mide 94 mm.
   a) ¿Cuántos mililitros de agua puede contener ese vaso hasta su borde?
   b) Si el agua regularmente se sirve en el vaso, dejando 1.5 cm libres por debajo del borde, ¿cuánta agua contiene?
10. Un contenedor metálico para concreto está formado por un cuerpo cilíndrico con un radio de 1.8 m y una altura de 5 m y, en la parte inferior, por un cono truncado con una altura de 1.1 m y un ángulo sobre su base de 60°. Calcula su volumen total.

Es posible despejar de la fórmula del volumen del cilindro $V = \pi r^2 h$, las expresiones:

$$h = \frac{V}{\pi r^2} \qquad r = \sqrt{\frac{V}{\pi h}}$$

Éstas sirven para calcular las variables r (el radio de la base) y h (la altura del cilindro), haciéndolas dependientes del volumen V y la otra variable conocida.

De la fórmula del volumen del cono $V = \frac{\pi r^2 h}{3}$, también es posible despejar:

$$h = \frac{3V}{\pi r^2} \qquad r = \sqrt{\frac{3V}{\pi h}}$$

¿Cómo te podrían ayudar estas referencias para resolver los problemas de este tema?

Para saber más sobre el volumen de conos y pirámides, consulta en la Biblioteca de Aula: *La geometría en el deporte* de Carlos Hernández Garcíadiego, 2003.

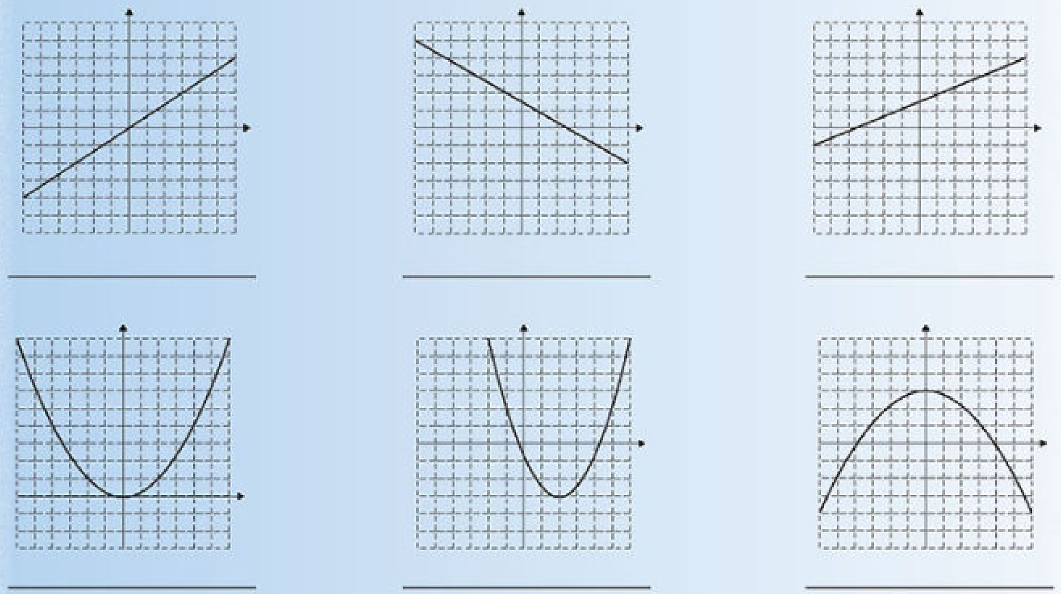
Proporcionalidad y funciones

Análisis de situaciones problemáticas asociadas a fenómenos de la física, la biología, la economía y otras disciplinas, en las que existe variación lineal o cuadrática entre dos conjuntos de cantidades

Reactivando el saber

Realiza la siguiente actividad.

Las gráficas de las siguientes funciones quizá te resulten familiares, identifica cuáles son cuadráticas y cuáles lineales en sus gráficas.



Las ecuaciones que representan estas gráficas son casos particulares de una función, que analiza la relación entre dos variables.

Observa las gráficas con atención y completa el siguiente enunciado.

Mientras que una función lineal se representa a través de ____________, la función o **variación cuadrática** se expresa con ____________.

Palabra Mu

variación cuadrática. Relación entre dos variables o cantidades por medio de una función de segundo grado, es decir, elevada al cuadrado.

Analiza y resuelve los siguientes problemas.

a) Establece si el punto dado pertenece a la recta cuya ecuación es $y = 3x - 1$. Para ello, anota en el recuadro "Sí" o "No".

(2, 1)		(2, 2)		(2, 5)		(2, 6)	
(3, 7)		(3, 8)		(4, 10)		(4, 12)	

b) Escribe el valor de la coordenada que falta para que el punto sea parte de la recta.

(1,) (5,) (, 11) (, 20) $\left(\frac{1}{2}, \quad\right)$

Planteen y resuelvan un sistema de ecuaciones que les permita solucionar el problema.

1. Si una recta $y = ax + b$ pasa por los punto $P = (2,1)$ y $Q = (3,7)$, ¿qué valores tienen los coeficientes a y b?
2. Encuentren el punto medio entre los puntos dados y verifiquen si éste también pertenece a la recta. Recuerden que cada coordenada del punto medio es el promedio de las coordenadas correspondientes en los puntos P y Q.
3. Reflexionen en torno al enunciado "Como dos puntos distintos de una recta dan lugar a dos ecuaciones, esto basta para encontrar los dos coeficientes a y b".
4. De acuerdo con lo anterior, ¿cuántos puntos distintos se requieren para encontrar los coeficientes de la función cuadrática $y = ax^2 + bx + c$? ¿Qué pasaría si esos puntos estuvieran alineados?
5. Completen el siguiente enunciado.

   a) Para conocer los coeficientes de una función cuadrática, se necesitan al menos ____ puntos que ______________________________.

Explora

Para visualizar el significado de los coeficientes a y b de la función lineal $y = ax + b$, te sugerimos ingresar a la siguiente página electrónica:

http://www.mathopenref.com/linearexplorer.html

(Consulta: 15 de septiembre de 2014).

Observa qué le sucede gráficamente a la recta cuando el valor de a es positivo, cuando es negativo y cuando equivale a cero. Descríbelo en tu cuaderno.

Uno de los parámetros en la función lineal es conocido como "pendiente de la recta" y el otro como "ordenada al origen". Después de haber visto el efecto de cada uno, completa el enunciado.

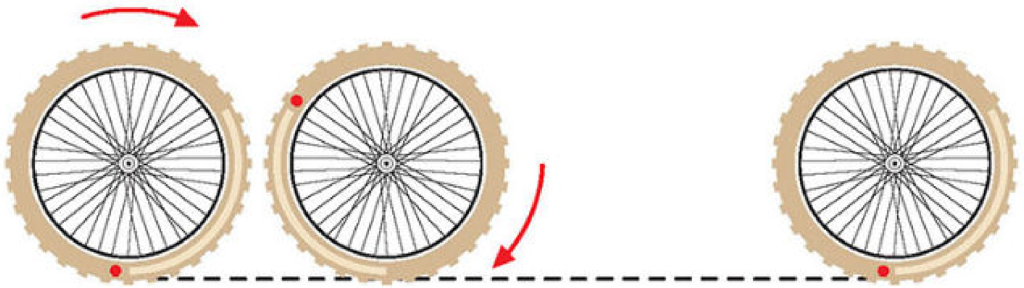
En la función lineal $y = ax + b$ la pendiente es ____________ y la ordenada al origen es ____________.

Ahora analicemos un problema basado en las siguientes preguntas: ¿Cuál es la relación entre el número de vueltas que da una rueda de bicicleta y la distancia que avanza? Estableciendo lo anterior, ¿sería posible saber qué distancia avanzará la bicicleta cuando la rueda dé 20 vueltas?

Hay dos opciones para responder estos planteamientos. Una sería estimar teóricamente la distancia que recorre la bicicleta con cada vuelta de rueda, y otra plantearía una solución empírica: contar el número de vueltas que da la rueda al recorrer una distancia conocida. Elegir la alternativa empírica o práctica permitiría establecer la relación entre dos variables a partir de la observación.

Con base en lo anterior, respondan lo que se solicita.

a) ¿Qué tipo de relación creen que exista entre el número de vueltas que da una rueda de bicicleta y la distancia que avanza: lineal o cuadrática? Justifiquen su respuesta.



b) ¿Qué datos se necesitarían para conocer la distancia que cubre la rueda al dar una vuelta?, ¿cuál sería la fórmula adecuada para determinarlo?

c) Si quisieran basar su análisis en la observación, ¿en cuántos puntos de la gráfica tendrían que registrar sus datos?

d) Tomen en cuenta que ya hay un punto establecido de manera natural. ¿De cuál se trata?

e) ¿Qué distancia recorre una bicicleta cuando su rueda da cero vueltas?

f) ¿Será suficiente saber qué distancia recorrió cuando la rueda dio, por ejemplo, tres vueltas?

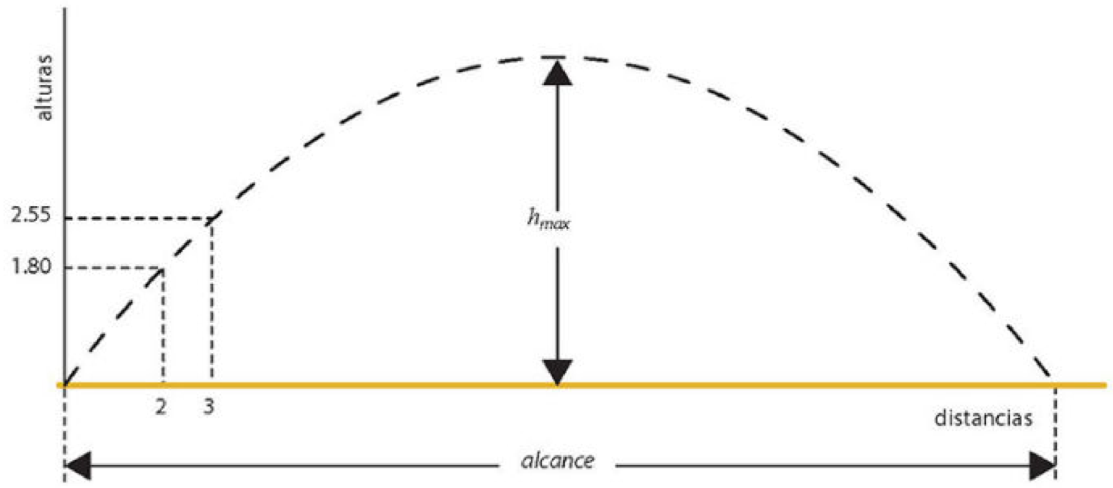
g) Suponiendo que la bicicleta avanzó 6.7 m al dar tres vueltas, ¿cuál sería la relación y qué explicaría la distancia en función del número de vueltas? Es decir, si d es la distancia y n el número de vueltas, entonces:

$d =$

Comparen sus respuestas con las de los otros equipos y analicen las diferencias.

Analicen el siguiente planteamiento y contesten las preguntas que permitirán modelar la trayectoria de un proyectil, a partir de los datos registrados por un observador.

Un proyectil fue lanzado desde el piso con cierto ángulo de elevación y un observador registró dos posiciones de éste, anotando alturas de 1.8 y 2.55 m, cuando las distancias que había avanzado fueron de 2 y 3 m, respectivamente.



a) Sabiendo que un proyectil describe una trayectoria parabólica, usen los datos para encontrar una expresión algebraica que explique la relación entre la altura y la distancia. Recuerden que hay un tercer punto conocido, aunque no se haya mencionado.

b) A partir de la expresión que encontraron, calculen las alturas que el proyectil tendría para 9, 11 y 13 m.

c) Calculen también la distancia que debe recorrer éste para que su altura vuelva a ser cero; es decir, calculen su alcance.

d) ¿Qué harían para saber cuál es la altura máxima alcanzada por el proyectil y a qué distancia ocurriría?

e) Para responder lo anterior, ¿será útil saber que una parábola tiene un eje de simetría que pasa por su vértice?

Comparen sus respuestas con las de otros equipos y compartan los métodos que utilizaron.

Explora

Para comprender el efecto de los coeficientes a, b y c en la función cuadrática $y = ax^2 + bx + c$, visita el siguiente sitio electrónico:
http://www.mathopenref.com/quadraticexplorer.html
(Consulta: 15 de septiembre de 2014).

Con base en la página electrónica sugerida, analiza qué pasa si cambian los valores de los coeficientes y responde.

a) ¿Cómo se ve la parábola cuando el valor de a es positivo, negativo o cero?, ¿qué ocurre cuando aumenta?

b) Observa la parábola justo cuando cruza al eje y, responde los mismos planteamientos para b y c.

c) En la función cuadrática, uno de sus parámetros (o coeficientes) es la "apertura hacia arriba o hacia abajo y la curvatura", otro indica una traslación "horizontal" y uno más es la "ordenada al origen". Después de haber visto el efecto de cada coeficiente, completa el enunciado.

- En la función cuadrática $y = ax^2 + bx + c$, ________ es la curvatura, ________ es una traslación y ________ es la ordenada al origen.

d) Vuelve a observar la trayectoria parabólica del proyectil analizada en equipo y responde la pregunta.

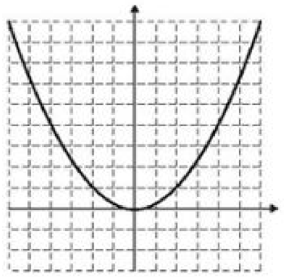
- ¿Cuál debería ser el signo de la curvatura?

e) Tomando en cuenta el desplazamiento del vértice de la parábola, ¿cuál debería ser el signo del coeficiente lineal?

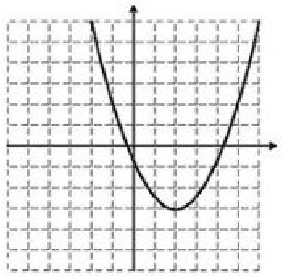
- ¿Qué valor tendría la ordenada al origen?

f) Compara tus respuestas cualitativas con los valores obtenidos durante la actividad y verifica que correspondan.

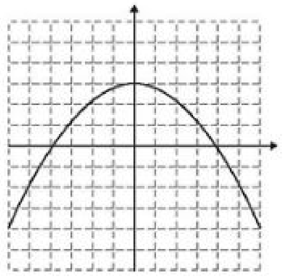
g) Para finalizar esta actividad, en las gráficas que se presentan a continuación, anota a la derecha de cada coeficiente "< 0", "= 0" o "> 0", según corresponda.



a b c



a b c



a b c

Analicen la siguiente información y realicen lo que se solicita.

En un laboratorio de análisis químicos, equipado con un **espectrofotómetro** de absorción atómica, es posible conocer la concentración de un elemento dado en una solución acuosa, porque existe una relación lineal entre la concentración (dada en partes por millón, ppm) y las unidades de **absorbancia** (ua) registradas por el aparato. Por ejemplo, se sabe que 2 ppm de plomo en una solución acuosa registran 16 ua y que 4 ppm dan lugar a 32 ua; es decir, que al duplicar la concentración, también lo hacen las unidades de absorbancia.

Palabra Mu

espectrofotómetro. Aparato que mide la cantidad de luz absorbida por una sustancia en disolución y compara intensidades espectrales con respecto a una longitud de onda.

absorbancia. Medida de la atenuación de una radiación al atravesar una sustancia.

a) Tracen una gráfica, colocando en el eje x las unidades de absorbancia, y en el eje y la concentración de plomo en agua.

b) Obtengan una expresión algebraica que permita calcular la concentración y a partir de las unidades de absorbancia x.

c) Calculen la concentración de plomo que hay en una muestra que registra 52 ua al ser analizada.

d) Estimen la lectura que se registraría en el aparato para una muestra de la cual se sospecha que tiene una concentración de 3.5 ppm.

e) Al analizar varias muestras de algas marinas se leyeron entre 40 y 80 ua. Calculen las concentraciones de plomo que había en las muestras.

f) ¿Entre estas variables existe una relación de proporcionalidad?, ¿por qué?

g) ¿Qué significado tiene la pendiente en esta relación lineal?

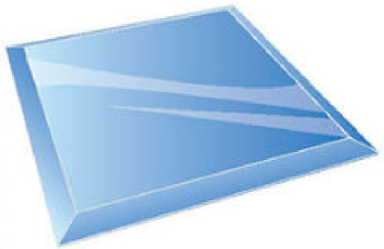
h) ¿Qué conlleva que la ordenada al origen de esta relación sea cero?

Analicen el problema y respondan las preguntas que se presentan a continuación.

Suele calcularse el precio del vidrio según su área, pero algunas veces los clientes piden que esté biselado, es decir, que tenga en la periferia un desgaste pulido que lo haga ver elegante. En ese caso, el biselado se cobra por metro lineal. Por ejemplo, un vidrio biselado de 40 cm $\times$ 50 cm tiene un área de 0.20 m^2 y un perímetro de 1.80 m. Si el metro cuadrado de vidrio costara \$200 y el metro lineal de biselado \$150, el precio del vidrio sería $200 \times 0.20 + 150 \times 1.80 = 310$.

Completen la siguiente tabla basándose en la información del problema.

Largo (m)	Ancho (m)	Área del vidrio (m^2)	Medida del biselado (m)	Precio (\$)
0.1	0.2	0.02	0.6	94
0.3	0.3	0.09	1.2	198
0.4	0.5	0.2	1.8	310
0.5	0.6			
0.7	0.9			
0.8	0.8			
0.9	0.7			



1. Un cliente pagó \$174.40 por un vidrio biselado de 40 cm $\times$ 40 cm y \$272.40 por otro, también biselado, de 60 cm $\times$ 60 cm.

   a) Tracen una gráfica, poniendo en el eje x la medida del lado del vidrio en metros, y en el eje y el precio. Identifiquen en esa gráfica los dos puntos mencionados en el planteamiento, así como un tercer punto que está implícito: ¿Cuánto costaría un vidrio biselado de lado cero?

   b) Como en el precio se involucra el área del vidrio, busquen una relación cuadrática de la forma $y = ax^2 + bx + c$, que permita calcular el precio y, conociendo el lado del cuadrado x. Como la parábola que le corresponde pasa por el origen, ¿qué valor debería tener c?

   c) Usen la relación que encontraron para calcular el precio de un vidrio biselado de 50 $\times$ 50 cm y el de otro que mide 90 $\times$ 90 cm.

   d) A partir de la expresión algebraica, deduzcan el precio de 1 m^2.

2. Si bien el modelo que construyeron sólo sirve para vidrios cuadrados, conociendo los precios unitarios, pueden calcular otros precios.

   a) ¿Cuál sería el precio de un vidrio rectangular biselado de 60 cm $\times$ 90 cm?

   b) ¿Cuánto habría que pagar por una cubierta biselada de 50 cm $\times$ 120 cm?

   c) ¿Cuánto costaría un vidrio circular biselado de 45 cm de diámetro?

Discutan el significado de los coeficientes a y b que encontraron.

¿Por qué a tiene un significado por sí mismo, pero b debe dividirse entre cuatro para cobrar sentido? Recuerden que ésta es la fórmula para calcular el precio:

$$P = pv \times área + pb \times perímetro$$

En donde pv es el precio de un metro cuadrado de vidrio y pb el precio de un metro lineal de biselado.

Bloque 5

Nociones de probabilidad

Análisis de las condiciones necesarias para que un juego de azar sea justo, con base en la noción de resultados equiprobables y no equiprobables

Reactivando el saber

Analiza la información y responde lo que se solicita.

Existen muchas situaciones en las que debemos tomar decisiones sin saber a ciencia cierta lo que va a ocurrir. Un ejemplo de ello es, cuando al salir de casa, te preguntas si debes llevar paraguas o no.

Cuando existe incertidumbre sobre lo que va a suceder, recurrimos a la probabilidad. Pese a no saber si lloverá ese día, tenemos algunos indicios que nos permiten estimar qué es más probable: "que llueva" o "que no llueva". Sin embargo, cuando no hay elementos suficientes para tomar una decisión, llevamos a cabo prácticas como tirar una moneda al aire. ¿Alguna vez lo has hecho? Comparte tu experiencia con alguno de tus compañeros.

Analicen y respondan las siguientes preguntas. Todos los integrantes del equipo deben proporcionar una respuesta.

a) ¿Cuáles son los dos posibles resultados de tirar una moneda?

b) ¿Crees que alguno de los dos resultados es más probable?, ¿cuál de ellos? Justifica tu respuesta.

Palabra Mu

resultados equiprobables. Resultados que tienen la misma probabilidad de ocurrir.

resultados no equiprobables. Cuando la probabilidad de dos resultados es distinta.

Cuando en un experimento aleatorio dos resultados posibles tienen la misma probabilidad, se dice que son **resultados equiprobables**; cuando la probabilidad de dos resultados es distinta, se consideran **no equiprobables**. Un resultado en un experimento aleatorio es más probable si tiene mayor oportunidad de salir que los demás.

Construyendo Matemáticas

En la siguiente actividad realizarás un experimento para predecir resultados.

Realicen lo que se indica a continuación.

Experimento 1: Tirar monedas para determinar la probabilidad de que ocurra un resultado.

a) Realicen una predicción: antes de tirar una moneda, escriban el resultado que creen que saldrá.

b) Una vez realizada su predicción, tiren la moneda y registren el resultado.

c) ¿Fue el que habían previsto?

d) *Encuesta grupal*: Completen la tabla con los resultados de todo el grupo.

Resultados del experimento 1			
Núm. de águilas obtenidas	Núm. de soles obtenidos	Núm. de alumnos que confirmaron su predicción	Núm. de alumnos que no confirmaron su predicción
Total de alumnos:			

e) Con base en los resultados de la tabla, ¿podrían decir cuál de los resultados es más probable? ¿Se trata de resultados equiprobables? Discutan en el grupo y anoten sus conclusiones al respecto.

f) ¿Creen que tirar una moneda ofrece a los participantes en un "volado" la misma probabilidad de ganar?

g) ¿Consideran que tirar una moneda es una alternativa justa para tomar decisiones?, ¿por qué?

h) ¿Tirar una moneda será una buena manera de decidir si hay que llevar paraguas o no? Expliquen sus respuestas.

¿Qué relación hay entre el espacio muestral y los eventos? Para determinar la probabilidad de un evento, ya sea simple o compuesto, suele dividirse la cantidad de eventos simples que lo forman entre la cantidad total de eventos que forman el espacio muestral. Esto se hace mediante la fórmula:

$$P = \frac{eventos\ favorables}{eventos\ posibles}$$

Es por ello que la probabilidad de obtener el número 5 al lanzar un dado equivale a:

$$P(5) = \frac{\{5\}}{\{1,2,3,4,5,6\}} = \frac{1}{6} = 0.17$$

Mientras que la probabilidad de obtener un número par corresponde a:

$$P(pares) = \frac{\{2, 4, 6\}}{\{1,2,3,4,5,6\}} = \frac{3}{6} = 0.5$$

Realicen el siguiente experimento.

Experimento 2: Tirar dos monedas simultáneamente.

Completen la siguiente tabla.

Concepto	Ejemplos
Experimento aleatorio	Tirar dos monedas al mismo tiempo
Espacio muestral	{_____, _____, _____, _____}
Eventos	Los resultados posibles de este experimento son: __________ __________
Eventos compuestos	Las combinaciones de eventos que puede haber en el experimento son: • __________ • __________
Probabilidad de obtener dos águilas	
Probabilidad de obtener dos soles	
Probabilidad de obtener un águila y un sol	

Realiza el siguiente experimento.

Experimento 3: Tirar una moneda una vez.

Completa la tabla del experimento.

Concepto	Ejemplos
Experimento aleatorio	Tirar una moneda una sola vez
Espacio muestral	
Evento	
Evento compuesto	
Probabilidad	

a) ¿Cuál es la probabilidad de obtener águila al tirar una moneda?, ¿y la de obtener sol?

Comenten sus respuestas de la tabla con sus compañeros. ¿Éste es un experimento justo?, ¿por qué?

Realiza la siguiente actividad.

Observa el siguiente tablero de números. Supón que recortas por separado los cuadros, los volteas, de manera que no pueda verse lo que está escrito en ellos y los revuelves. Antes de pensar en la probabilidad de que obtengas ciertos números, tienes que hacer una lista de números como la siguiente.

a) Pares: ____________________

b) Impares: ____________________

c) Primos: ____________________

d) Compuestos: ____________________

e) Cuadrados: ____________________

f) No cuadrados: ____________________

Tablero de números				
18	29	48	37	28
38	47	11	10	39
26	44	33	17	40
23	13	20	34	43
31	50	21	45	16

Con esa información, es viable hacer algunos planteamientos. Elige la opción que sea más probable en cada enunciado.

a) Obtener un número par o un número impar

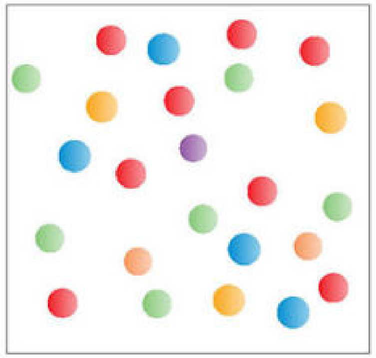
b) Obtener un número primo o un número compuesto

c) Obtener un número cuadrado o un número no cuadrado

d) Obtener un número par o un número primo

e) Obtener un número primo o un número cuadrado

Existen muchos experimentos aleatorios bien estudiados; uno de ellos conocido como urna de Bernoulli consiste en colocar en una urna cerrada (puede ser una bolsa) pelotas de diferentes colores, en la que el jugador mete la mano y saca una sin mirar. Observa la urna y realiza lo que se indica.



En esta urna, los eventos son los siguientes:

- Obtener
- Obtener
- Obtener
- Obtener
- Obtener
- Obtener

Completa los enunciados con las frases: *es más probable que, es menos probable que o tiene la misma probabilidad que,* según corresponda.

- Obtener ____________________ obtener
- Extraer ____________________ extraer
- Obtener ____________________ obtener
- Extraer ____________________ extraer o
- Sacar o ____________________ sacar o

1. Si te propusieran el juego "ganas si extraes o , pierdes si extraes o , el juego se repite si obtienes cualquier otro color", ¿lo considerarías justo?, ¿por qué?

2. Si definimos el evento compuesto *colores primarios* = { , , } y el evento compuesto con *colores secundarios* = { , , }, podemos decir que sacar un *color primario* es ____________ sacar un *color secundario*.

3. Si te propusieran el juego "ganas si extraes un color primario y pierdes si extraes un color secundario", ¿lo considerarías justo? ¿Por qué?

4. Determina las probabilidades de cada evento.

- P( ) =
- P ( ) =
- P ( ) =
- P( ) =
- P ( ) =
- P ( ) =

5. Ordena las pelotas de los seis colores por orden de probabilidad.

○ ○ ○ ○ ○ ○

6. Este juego de urna tiene, al igual que el dado, seis eventos; incluso en lugar de colores se podrían utilizar los números de 1 al 6. Si tuvieras que "apostar" por un color de esta urna, ¿por cuál lo harías? Explica lo anterior utilizando el concepto de probabilidad.

7. ¿Cuál es la diferencia entre jugar al dado y a la urna?

Hasta ahora hemos visto situaciones en las que determinar la probabilidad de un evento es relativamente fácil porque:

a) Se conocen todos los eventos (resultados posibles)

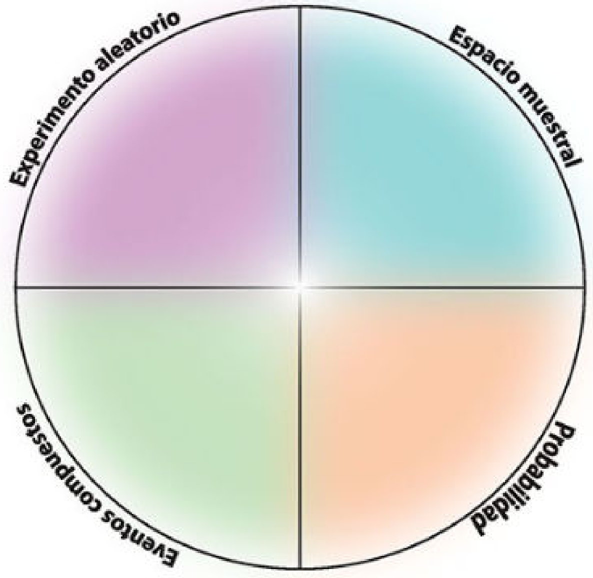
b) Es factible contar y distinguir todos los eventos

c) Los eventos independientes tienen la misma probabilidad de ocurrir

d) Se puede aplicar la regla $P = \frac{eventos\ favorables}{eventos\ posibles}$

Desafortunadamente en muchas situaciones no es posible hacer esto, por ejemplo, ¿cómo calcular la probabilidad de que llueva una mañana a mediodía? Una manera sencilla es observar el clima, ya que puede darnos una idea. Pero para hablar de probabilidad, debemos ser capaces de asignar a cada evento un valor que compare sus oportunidades contra los otros eventos.

Utiliza la rueda de ideas para recordar lo que sabes sobre cada uno de los conceptos que se presentan a continuación. Inventa un experimento aleatorio simple y descríbelo en el espacio correspondiente; escribe dentro de los tres espacios restantes lo que significa cada concepto en tu ejemplo.



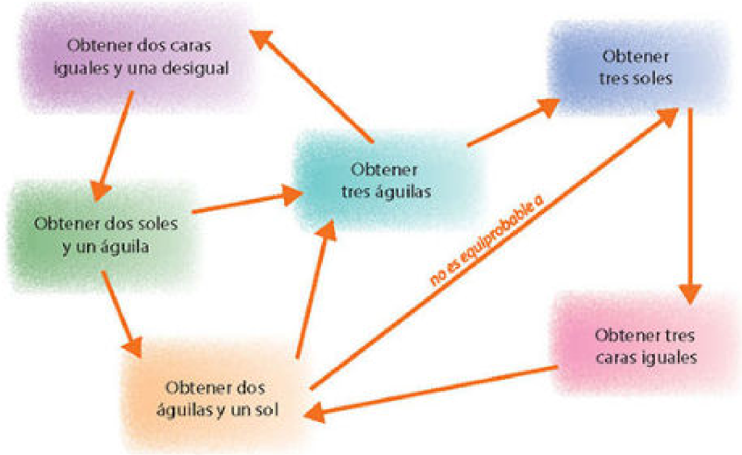
Realiza el siguiente experimento.

Experimento 4: Tirar tres monedas diferentes.

1. Completa la tabla del experimento.

Concepto	Ejemplos
Experimento aleatorio	
Espacio muestral	{AAA, AAS, ASA, SAA, ASS, SAS, SSA, SSS}
Eventos compuestos	
Probabilidad	

2. Escribe sobre el evento si es equiprobable o no equiprobable, tal como se muestra en el ejemplo.



En el experimento anterior, pudiste comparar varios eventos compuestos. Utiliza la misma idea para analizar el siguiente experimento.

Experimento 5: Tirar dos dados.

Completa la tabla del experimento y realiza lo que se solicita.

Concepto	Ejemplos	
Experimento aleatorio		
Espacio muestral		
Eventos compuestos	• La diferencia es 0 • La diferencia es 1 • La diferencia es 2	• La diferencia es 3 • La diferencia es 4 • La diferencia es 5
Probabilidad		

a) Haz un diagrama en tu cuaderno, parecido al que se hizo para las monedas, para comparar entre sí los seis eventos compuestos. Escribe sobre cada evento si es equiprobable o no equiprobable.

b) Revisa los diagramas que completaste en este apartado:

- ¿Se podrían realizar sin definir el espacio muestral y los eventos compuestos de cada experimento?
- ¿Por qué es útil asignar valores numéricos a la probabilidad de que ocurra cada evento?

¿Hay alguna manera de determinar si lloverá mañana o no? Cerraremos esta lección, regresando a este planteamiento. Comenta con algún compañero cómo creen que los meteorólogos pronostican el clima.

Imagina que tienes un espacio muestral con dos eventos: “que llueva mañana” y “que no llueva mañana”. A cada uno de esos eventos hay que asignarle un valor para poder compararlos.

Los servicios meteorológicos toman en cuenta muchos factores como la presión atmosférica, la temperatura, la humedad, los vientos, entre otros. Tienen una gran base de datos en la que “reconocen” días parecidos al de hoy y comparan en cuántos casos llovió al día siguiente. Así, si de “10 días como hoy” en 7 hubo lluvia, al día siguiente hacen un cálculo como el siguiente a fin de conocer la probabilidad de lluvia para el octavo día.

$$P(\textit{llueve mañana}) = \frac{7}{10} = 0.7 = 70\%$$

Realicen la siguiente actividad.

Palabra Mu

Ley de los grandes números. Al repetir un experimento aleatorio un número de veces, la frecuencia relativa de cada suceso elemental tiende a aproximarse a un número fijo, llamado probabilidad de un suceso.

Cuando hicieron los experimentos anteriores, obtuvieron algunos resultados. La **ley de los grandes números** conjunta predicciones que se vuelven más exactas a medida que el número de experimentos realizados aumenta.

Por ejemplo, en el caso de tirar una moneda, la cantidad de águilas debe ser igual a la cantidad de soles, es decir, la mitad de los resultados:

$$P(\textit{águila}) = \frac{\textit{águilas obtenidas}}{\textit{experimentos realizados}} = 0.5$$

Si se hacen pocos experimentos puede ocurrir que el error de esta predicción sea muy grande. En un tiro obtendrás 100% águilas, o bien 100% soles; no hay otra posibilidad. Realízalo 200 veces y registra los resultados con rayas diagonales (/) que se trazan cada vez que se obtiene un resultado para facilitar el conteo; cuando se juntan 5 rayas, se crea una nueva figura (////).

Tu resultado debe ser parecido a 0.5, aunque es muy probable que tenga un pequeño margen de error.

Comparen sus resultados con los de sus compañeros. Al final, realicen lo que se solicita y respondan las preguntas.

Sumen todas las águilas obtenidas y todos los soles obtenidos; después dividan los resultados entre el total de tiros realizados.

a) ¿Cuál fue la probabilidad experimental de cada cara?

b) ¿Se trata de resultados equiprobables o no equiprobables?

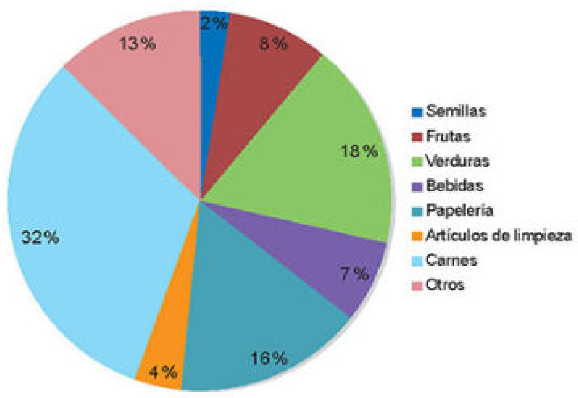
c) ¿Tirar una moneda para tomar una decisión es un juego justo?

Justifiquen sus respuestas.

Evaluación tipo PISA

Lee, analiza la información presentada y resuelve las siguientes situaciones problemáticas.

Las ventas del único mercado de un pueblo en los últimos tres meses fue de $200 000 por el total de los enseres que ofrece. Analiza la siguiente gráfica con la distribución de la venta de sus productos.



1. ¿Cuál fue la venta de verduras en estos tres meses?
a) $17 000
b) $32 000
c) $35 000
d) $64 000

2. ¿Cuál es el valor estimado de venta mensual de carnes?
a) $8 333.33
b) $14 000.00
c) $21 333.33
d) $64 000.00

3. ¿Cuál fue la venta de bebidas y otros en los últimos tres meses?
a) $25 000
b) $32 000
c) $35 000
d) $39 000

4. ¿Cuáles son los dos productos que representan una venta de $72 000 en los últimos tres meses?
a) Carnes y artículos de limpieza
b) Carnes y semillas
c) Verduras y papelería
d) Verduras y frutas

Evalúa lo que aprendiste sobre sistemas de ecuaciones utilizando este código.

Bibliografía

Bibliografía recomendada para el profesor

Carrol, L., *El juego de la lógica y otros escritos*, Madrid, Alianza, 2002.

Courant, R., *¿Qué son las matemáticas: conceptos y métodos fundamentales?*, México, FCE, 2002.

Piaget, J., *Psicología y pedagogía*, Barcelona, Crítica, 2005.

Polya, G., *Cómo plantear y resolver problemas*, México, Trillas, 2001.

Stewart, Ian, *El laberinto mágico. El mundo a través de ojos matemáticos*, Barcelona, Crítica, 2011.

Tahan, M., *Matemática divertida y curiosa*, Buenos Aires, Pluma y papel, 2006.

Vygotsky, L., *El desarrollo de los procesos psicológicos superiores*, Barcelona, Crítica, 2003.

Enlaces recomendados para el profesor

Biblioteca de actividades interactivas de la Universidad de Utah, EUA, http://nlvm.usu.edu/en/nav/vlibrary.html (Consulta: 23 de julio de 2014).

Educación para la vida, "en la recta numérica", 14 de octubre de 2011, Sistema de educación para la vida, http://www.si-educa.net/basico/ficha395.html (Consulta: 19 de junio de 2014).

Martín, Abel, "Aplicación del mcd y mcm a la resolución de problemas literales", Aula matemática digital eso, España, http://www.aulamatematica.com/ESO2/PDF_resueltos/E2_MCD_02_resueltos.pdf (Consulta: 4 de junio de 2014).

Rivera, Luz M., "Suma y resta de fracciones", Universidad Interamericana de Puerto Rico, Ponce, julio de 2002, http://www.Ponce.inter.edu/cremc/fracciones3.htm (Consulta: 11 de mayo de 2014).

Rodríguez Viorato, Jesús, "Interactivo de rectas notables de un triángulo", Matemáticas para adolescentes, 29 de agosto de 2013, http://www.matetam.com/de-consulta/books/interactivorectas-notables (Consulta: 23 de julio de 2014).

Bibliografía consultada

Baldor, Aurelio, *Álgebra*, México, Publicaciones culturales, 2006.

Courant, Richard, *¿Qué son las matemáticas? Conceptos y métodos fundamentales*, México, FCE, 2002.

Gómez Chacón, María, *La actividad matemática en el aula*, Barcelona, GRÁO, 2004.

—, *Nuevas tecnologías y enseñanza de las matemáticas*, Madrid, Síntesis, 2000.

—, *Matemática emocional, Los afectos en el aprendizaje matemático*, Madrid, Narcea, 2000.

Jacobs, Harold, *Geometry*, EUA, Freeman, 2006.

McFarlane, Angela, *El aprendizaje y las tecnologías de la información. Experiencias,promesas, posibilidades*, México, Alfaguara, 2003.

SEP, *Fichero de actividades didácticas matemáticas, Educación secundaria*, México, 2000.

SEP, *Geometría dinámica*, México, EMAT, 2000.

SEP, *Hoja electrónica de cálculo*, México, EMAT, 2000.

SEP, *Programa de estudio, Matemáticas. Educación Básica*, México, SEP, 2011.

Subdirección General de Programación. Inegi. Censos Generales y Conteos, http://www.inegi.org.mx/est/contenidos/proyectos/ccpv (Consulta: 1 de octubre de 2014).

Bibliografía recomendada para el alumno

Amster, Pablo, *La matemática: como una de las bellas artes*, México, SEP/Siglo XXI, 2006. (Libros del Rincón).

Anno, Masaichiro; Anno Mitsumasa, *El misterioso jarrón multiplicador*, México, SEP/FCE, 2007. (Libros del Rincón).

Bosch, C. y Claudia Gómez, *Una ventana a la incertidumbre*, México, SEP/Santillana, 2003. (Libros del Rincón).

— *Una ventana a las formas*, México, SEP/Santillana, 2003. (Libros del Rincón).

Campos, Alberto, Laplace, *Ensayo filosófico sobre las probabilidades*, Colombia, Revista Colombiana de Estadística, Volumen 27, Núm. 2, Págs. 153 a 177, diciembre de 2004.

Hernández Garcíadiego, Carlos, *La geometría en el deporte*, México, SEP/Santillana, 2003.

Fernández, Gabriel, *Historia de las matemáticas en comics*, España, Proyecto Sur de Ediciones, 2003.

Heranz, Carlos, *Póngame un kilo de matemáticas*, España, Ediciones SM, 2003.

Loomis, Elisha S., *The Pythagorean Proposition*, Consejo Nacional de Maestros de Matemáticas, Segunda edición, EUA, 1968 (Serie Clásicos en Educación Matemática).

Marván, Luz María, *Andrea y las fracciones*, México, SEP/Santillana, 2003. (Libros del Rincón).

—, *Representación numérica*, México, SEP/Santillana, 2003. (Libros del Rincón).

Mori, Tuyosi; Anno, Mitsumasa, *Sócrates y los tres cochinitos*, España, SEP/FCE, 2009. (Libros del Rincón).

Noreña Villarías, Francisco, *La medición y sus unidades*, México, SEP/Santillana, 2002. (Libros del Rincón).

Perelman, Yakov. *Matemáticas recreativas*. México: SEP/Planeta, 2003 (Libros del Rincón).

Ruiz, Concepción, De Régules, Sergio, *Crónicas algebraicas*, México, SEP/Santillana, 2002. (Libros del Rincón).

—, *El piropo matemático, de los números a las estrellas*, México, SEP/Editorial Lectorum, 2003. (Libros del Rincón).

Salamanca, Fabio, *El olvidado monje del huerto: Gregor Mendel*, México, SEP/Pangea Editores, 2003. (Bibilioteca de Aula).

Sierra, Jordi, *El asesinato del profesor de matemáticas*, España, Grupo Anaya, 2000.

Stewart, Ian, *Baúl de tesoros matemáticos*, Barcelona, Crítica, 2010.

Tahan, M., *El hombre que calculaba*, México, SEP/Limusa, 2005. (Libros del Rincón).

Enlaces recomendados para el alumno

Arranz, José Manuel, "Geometría dinámica", Matemáticas: Construcciones para educación secundaria y bachillerato, España, 20 de agosto de 2007, http://roble.pntic.mec.es/jarran2/index.htm (Consulta: 2 de mayo de 2014).

Biblioteca digital, http://bibliotecadigital.ilce.edu.mx/sites/telesecundaria/tsm1g01v011/u03t09s01.html (Consulta: 20 de abril de 2014).

Centro Ceibal, "Ejercicios de probabilidad", Plan Ceibal, disponible en: http://www.ceibal.edu.uy/contenidos/areas_conocimiento/mat/probabilidad/ejercicios2.html (Consulta: 23 de abril de 2014).

Descartes 3D, "Notación científica", intef, http://recursostic.educacion.es/descartes/web/materiales_didacticos/notacion/notacion_cientifica.htm (Consulta: 4 de junio de 2014).

Ecuaciones cuadráticas

http://www.montereyinstitute.org/courses/Algebra1/COURSE_TEXT_RESOURCE/U10_L1_T1_text_final_es.html&#10 (Consulta: 13 de enero 2015).

http://www.montereyinstitute.org/courses/Algebra1/COURSE_TEXT_RESOURCE/U10_L1_T1_text_final_es.html (Consulta: 13 de enero 2015).

http://www.matematicasvisuales.com/html/analisis/polynomial/quadratic.html (Consulta: 13 de enero 2015).

http://www.extremate.es/ESO/Definitivo%20Funciones/textolineal.swf (Consulta: 13 de enero 2015).

Función cuadrática

http://www.mathopenref.com/quadraticexplorer.html (Consulta: 15 de septiembre de 2014).

http://www.montereyinstitute.org/courses/Algebra1/COURSE_TEXT_RESOURCE/U10_L1_T1_text_final_es.html (Consulta: 13 de enero 2015).

Función lineal

http://www.extremate.es/ESO/Definitivo%20Funciones/textolineal.swf (Consulta: 13 de enero).

http://www.mathopenref.com/linearexplorer.html (Consulta: 15 de septiembre de 2014).

Geogebra

http://www.geogebratube.org/student/m35760 (Consulta: 17 de septiembre de 2014).

Junta de Extremadura, Consejería de Educación, "Circunferencia y círculo", Atenex, http://conteni2.educarex.es/mats/11890/contenido/ (Consulta: 18 de mayo de 2014).

Miguel Díaz, José Ignacio, "Circunferencia", Instituto Nacional de Tecnologías Educativas y de Formación del Profesorado, México, http://platea.pntic.mec.es/jmigue1/circunferencia/circun1.htm (Consulta: 14 de agosto de 2014).

RENa, "Sumas y restas entre números enteros", Red Escolar Nacional, http://www.rena.edu.ve/TerceraEtapa/Matematica/TEMA7/sumasRestas.html (Consulta: 18 de agosto de 2014).

Secciones cónicas, http://www.cepazahar.org/recursos/pluginfile.php/3828/mod_resource/content/0/Proyectos/coni/presencia_de_las_cnicas_en_la_naturaleza_el_arte_y_la_tcnica.html (Consulta: 13 de septiembre de 2014).

Teorema de Tales, http://www.librosvivos.net/smtc/homeTC.asp?TemaClave=1224 (Consulta: 13 de enero 2015).

Tiro parabólico, http://www.educaplus.org/movi/4_3tparabolico.html (Consulta: 1 de octubre de 2014).

Créditos iconográficos

© Fotolia: pp. 10-11, 12, 76-77, 116, 130-131, 150, 158, 167, 188-189, 202, 228-229.
© Archivo iconográfico Fernández educación, s.a. de c.v./César Arce: pp. 26, 27, 38, 43, 47, 52, 53, 54, 55, 56, 60, 72, 95, 98, 99, 100, 106, 107, 111, 113, 119, 120, 140, 141, 146, 161, 162, 163, 164, 183, 193, 213.

Máximo Pérez • Sergio Pérez

Matemáticas 3

Construyo y aprendo Matemáticas

Matemáticas 3, importante eslabón de nuestra colección ***Construyo y aprendo Matemáticas***, involucra a los estudiantes de tercer grado de secundaria en un dinámico proceso de aprendizaje mediante el cual —y gracias a múltiples actividades que estimulan la creatividad como medio para resolver problemas— se impulsa el trabajo en colaboración y la evaluación formativa, a fin de fortalecer las competencias matemáticas.

La obra sigue un modelo constructivista, cuya secuencia didáctica facilita el proceso de aprendizaje partiendo de lo sencillo a lo complejo, de lo concreto a lo abstracto, con lo que se despierta y se mantiene el interés de los alumnos en los contenidos, al tiempo que se hace accesible y muy comprensible el lenguaje matemático.

A través de interesantes cápsulas, el libro complementa el saber matemático con datos curiosos e históricos, así como con estrategias de álgebra y geometría, además de un glosario de términos relacionados con el tema de estudio.

Matemáticas 3 *Construyo y aprendo Matemáticas*, consolida una vez más su presencia en el universo magisterial y facilita a alumnos y a profesores la comprensión y el uso eficiente de las herramientas matemáticas, vitales en la solución de problemas personales, sociales y naturales.

www.edexcelencia.com.mx
www.social.adiactiva.com.mx

ISBN: 978-607-472-084-6
9 786074 720846
S00177

Ediciones de Excelencia